précédente à une grande échelle, pour diverses positions des leviers.

On voit que l'oscillation de B*b* est convertie en C*c* en deux doubles oscillations, l'une qui s'étend de 2 à 10 qui est grande, et l'autre de 10 à 2 qui est petite, et peut être considérée comme se confondant avec un état de repos. Les oscillations de D*d* sont semblables, mais la grande oscillation correspond à la petite de B*b* et *vice versa*.

On peut encore réduire si l'on veut les petites oscillations, en attachant (comme dans le cinquième exemple) un nouveau levier à chacun des leviers C*c*, D*d* du présent système. La courbe E*e* représente le mouvement de ce levier en le supposant attaché à D*d*; on voit que la petite oscillation disparaît alors, et que la courbe se réduit en partie à une ligne droite qui se confond avec l'axe des ordonnées.

552. Les exemples ci-dessus indiquent les ressources que l'on peut retirer des combinaisons de leviers réunis par des bielles. Il faut observer que les pertes de temps provenant de l'élasticité de longues tiges ne les rendent pour la plupart applicables que dans un assez petit nombre de cas, et lorsqu'il n'y a pas en jeu des forces trop grandes.

CHAPITRE XI.

Mouvement quelconque en mouvement d'après une courbe.

553. Revenons au problème de produire le mouvement d'après une courbe donnée à l'aide d'un mouvement rectiligne ou circulaire. Le mouvement d'après une courbe ne se présente guère dans l'industrie que pour faire mouvoir certains outils; il ne se rencontre pas dans les récepteurs, la nature ne présentant que des forces qui agissent suivant des directions constantes et qui peuvent toujours s'utiliser par des systèmes à mouvement rectiligne ou circulaire.

Le mouvement suivant une courbe ne pouvant être produit en général qu'à l'aide de guides-courbes, les résistances passives qui s'opposent au mouvement par l'effet de guides de cette nature font facilement comprendre pourquoi ce genre de mouvement n'existe pas dans l'intérieur des machines, n'est jamais employé dans un organe de communication du mouvement, et n'est en général que le mouvement final de l'opérateur, quelquefois nécessaire d'après la nature du travail à effectuer.

Quoi qu'il en soit, voyons les solutions possibles de ce problème, qui peut évidemment se poser ainsi : *Tracer une courbe quelconque à l'aide de mouvements rectilignes ou de mouvements circulaires;* la pièce à mouvoir ou l'opérateur, s'il n'est autre qu'un outil pour tracer, étant assujetti à suivre le point qui trace la courbe.

Cette étude va nous faire sentir comment le mouvement suivant une courbe pouvant être produit par une combinaison de mouvements simples, la question se réduit à une application des systèmes déjà étudiés, pour produire le tracé qui résulte de la combinaison de leurs mouvements.

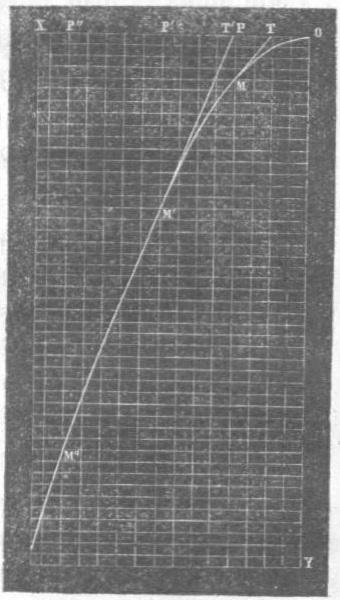
1° MOUVEMENT SUIVANT UNE COURBE PAR MOUVEMENTS RECTILIGNES.

554. ***Mouvements relatifs.*** — Le mouvement rectiligne engendrera un mouvement suivant une courbe si la pièce poussée en ligne droite passe dans une rainure courbe, et si on déplace le plan sur lequel la barre mue par le plan incliné courbe trace une trajectoire. Si on lui donne une vitesse exactement égale et contraire à celle du plan incliné (art. 328), on obtiendra ainsi le mouvement relatif d'un point de la barre. On voit que dans ce mouvement, les longueurs perpendiculaires au plan incliné courbe ne sont nullement modifiées, tandis que celles parallèles au mouvement du plan sont celles résultant du déplacement égal et parallèle du plan sur lequel s'effectue le tracé.

Dans cette disposition, la barre qui se meut le long du plan

courbe, agit comme si elle se mouvait simultanément suivant deux droites formant les deux côtés du petit plan incliné, formé par la tangente en un point à la courbe motrice.

La facile réalisation de la disposition qui permet d'obtenir le tracé du mouvement relatif par la combinaison de deux mouvements rectilignes, comme on vient de le dire, tels que l'un d'eux soit celui qui correspondrait au mouvement du plan sur lequel doit s'effectuer le tracé du mouvement relatif, conduit à obtenir expérimentalement les courbes figuratives du mouvement, les courbes ayant pour abscisses les temps et pour ordonnées les espaces parcourus, dont nous avons montré l'importance. Par ce moyen on obtient ainsi de suite les divers éléments du mouvement; nous prendrons pour exemple un appareil propre à l'étude de la chute des corps. Supposons un plan mû d'un mouvement rectiligne et uniforme (on préfère souvent le mouvement circulaire, qui occupe moins de place; mais lorsqu'il s'agit, comme dans le cas que nous allons examiner, d'un plan enroulé sur un cylindre qui tourne uniformément, le tracé sur le plan tangent est le même que sur le cylindre), et en regard de ce plan un poids cylindro-conique, qui porte un crayon dont la pointe s'appuie sur le papier, et qui porte des oreilles glissantes sur des fils verticaux destinés à le diriger dans sa chute. En appuyant sur un levier, on fait partir le poids à un moment donné; on attend pour cela que le mouvement du plan ou du cylindre soit devenu uniforme. Il suit de cette disposition, que si on a réglé la position du crayon de façon qu'il s'appuie sur le papier sans exercer un frottement trop considé-



rable, il tracera une ligne qui, sur une feuille de papier appliquée sur le plan, aura la forme indiquée par la figure 439.

Menons par l'origine de la courbe une droite horizontale, prenons sur cette droite des longueurs égales, et par leurs extrémités traçons des perpendiculaires jusqu'à la rencontre de la courbe; il est clair, puisque le mouvement du plan est uniforme, que la longueur de chaque verticale est l'espace parcouru par le corps, après un certain temps représenté par chaque horizontale. Or, on reconnaît par la mesure directe que pour une abscisse double de la première, la verticale est égale à 4 fois la première, pour une triple égale à 9 fois...: donc, les *espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps employés à les parcourir*. On peut multiplier ainsi les vérifications, qui sont toujours très-satisfaisantes. Pour rendre plus rapides les mesures des lignes verticales et horizontales, on peut employer du papier quadrillé, tracer par avance sur une feuille de papier ordinaire des traits verticaux et horizontaux équidistants.

555. On emploie le tracé de semblables courbes dans la dynamométrie, pour la mesure du travail, et cette méthode forme la base de l'expérimentation mécanique. C'est à M. Poncelet que revient l'honneur d'avoir montré la grande utilité de cette méthode.

Si l'on interpose un ressort entre le corps qui doit être mis

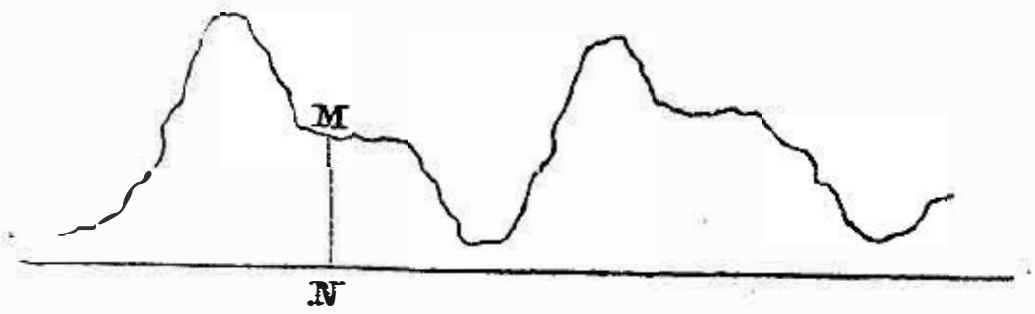


Fig. 440.

en mouvement et le point d'application de la puissance, un pinceau attaché à ce ressort tracera sur une feuille de papier mue dans une direction perpendiculaire à celle de l'effort, une courbe. Les ordonnées de cette courbe représenteront les tensions du ressort, et par suite seront proportionnelles aux efforts, tandis

que les abscisses seront proportionnelles au chemin parcouru par le corps en mouvement, à l'aide duquel, par une communication de mouvement, on fait mouvoir le papier dans un rapport de vitesse constant. On aura donc ainsi une courbe figurative du travail consommé, l'aire de la courbe représentera ce travail, à une certaine échelle facile à déterminer dans chaque cas.

556. *Combinaison de deux mouvements rectilignes.* — D'une manière générale, pour produire un mouvement suivant un élément de courbe à l'aide de mouvements rectilignes, il convient d'employer les mouvements de deux droites qui se coupent (nous les supposerons à angle droit dans tout ce qui va suivre, pour plus de simplicité, mais tout ce que nous dirons s'applique au cas où l'inclinaison serait quelconque) pour tracer toute espèce de courbes. Les points de rencontre de ces deux droites détermineront des successions de points disposés en raison des vitesses de ces droites, et pourront servir à tracer tout genre de courbes.

Ces droites, en effet, ne seront autre chose que les *coordonnées* rectilignes d'une courbe rapportée à deux axes parallèles aux mouvements rectilignes, et puisque toute courbe peut être représentée par une équation qui représente les relations de ses deux coordonnées, toute courbe sera aussi tracée par deux lignes dont les longueurs varieront en raison des relations exprimées par l'équation de la courbe.

Mais, ainsi que nous l'avons vu, pour donner un mouvement varié à une droite en raison de la variation des coordonnées, il faut employer une courbe, et cette courbe sera évidemment la même que celle qu'il s'agit de tracer.

En effet, soit A B (fig. 441) une barre douée d'un mouvement rectiligne : plaçons sur cette barre une courbe saillante $\alpha\,6$, et assujettissons une tringle $e\,D$ à se mouvoir en ligne droite en pressant sur cette courbe par l'effet d'un ressort, le point D extrémité de cette droite aura un mouvement rectiligne de progression

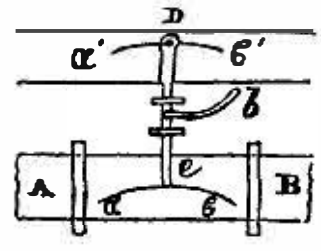


Fig. 441.

en raison des distances des divers points de la courbe à l'axe AB, et si au point D on place un outil, celui-ci tracera sur un plan qui aurait le même mouvement que AB, en sens contraire, une courbe $\alpha' 6'$, identique à la courbe $\alpha 6$.

557. C'est en traçant ainsi les courbes qui correspondent à toutes les sections d'une surface par des plans parallèles équidistants, que M. Collas trace dans sa machine à graver les médailles, sur un plan parallèle à ces sections, une succession de courbes qui représentent admirablement la surface modèle. Il faut, pour réaliser cette machine, placer à angle droit le modèle et la planche, les faire marcher de quantités égales pour chaque courbe, et faire suivre le modèle par la touche dans le plan parallèle au plan à graver sur lequel la courbe est tracée par le burin qui fait corps avec la touche.

558. Supposons maintenant le système précédent répété à angle droit du premier, qu'une barre A'B' douée d'un mouvement rectiligne porte une courbe $\alpha'' 6''$, sur laquelle s'appuie une tringle CD (fig. 444) comme la barre AB porte la courbe $\alpha' 6'$,

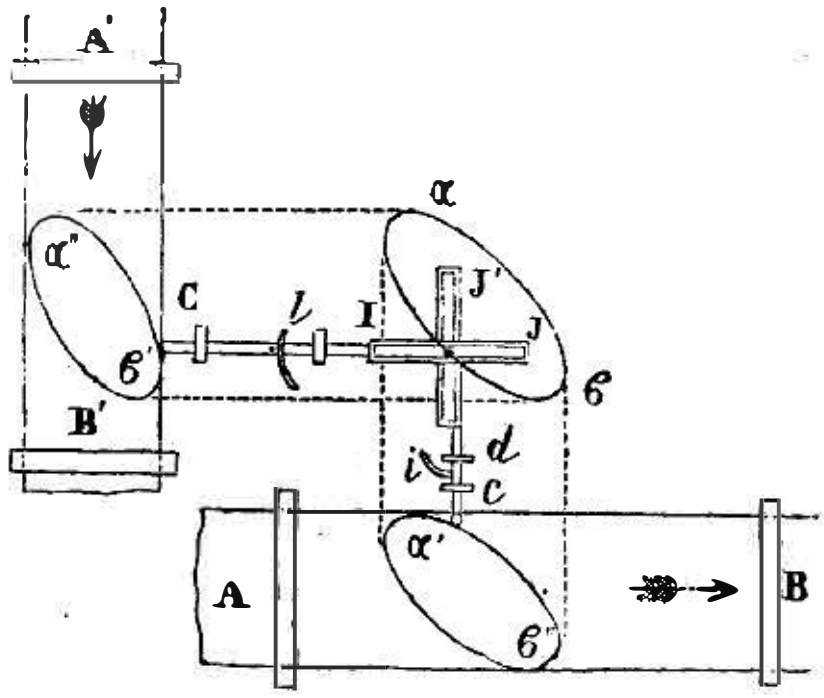


Fig. 444.

Fig. 442.

Fig. 443.

sur laquelle s'appuie la tringle cd, ces deux droites étant terminées par des rainures IJ, I'J' perpendiculaires à leur direction (fig. 442 et 443), un point de chacune de ces rainures donnera une des coordonnées perpendiculaire à la direction du mouvement.

Un outil placé à la rencontre des deux rainures IJ, I'J', tra-

cera une courbe qui sera déterminée par le transport rectiligne des deux premières.

La courbe ainsi déterminée par l'intersection de deux coordonnées sera telle, que si le mouvement des deux barres est le même, la vitesse la même, les deux courbes directrices $\alpha' 6'$, $\alpha'' 6''$, devront être identiques avec la courbe à obtenir $\alpha 6$.

Ainsi si la courbe à tracer est donnée par une équation entre ses coordonnées x et y, la courbe $\alpha 6$ aura évidemment par construction toutes les mêmes valeurs de y (l'axe des y étant l'axe de A′ B′) que la courbe $\alpha' 6'$, augmentée d'une constante l, égale à la longueur de cd.

Par la même raison, les valeurs de x de la courbe $\alpha'' 6''$ donneront les valeurs de x de la courbe $\alpha 6$, en les augmentant d'une même quantité l' égale à la longueur de CD.

Puisque, par hypothèse, les mouvements rectilignes sont tels que pendant que la tige cd parcourt tous les points de $\alpha' 6'$, ceux de la tige CD parcourent tous les points de $\alpha'' 6''$, les abscisses x seront déterminées par la courbe $\alpha'' 6''$ et les ordonnées y par la courbe $\alpha' 6'$ (comme il résulte de la disposition des rainures).

Si par exemple la courbe cherchée était une ellipse dont l'équation rapportée aux axes de AB, A′ B′ fût

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 x y + d^2 = 0,$$

la courbe $\alpha'' 6''$, pour laquelle toujours $x' = x - l$ (l étant la longueur de la tige CD), devra avoir une équation de forme telle qu'en remplaçant $x - l$ par x, on retombe sur l'équation précédente, autrement les valeurs de $x - l$ pour les valeurs de y ne sauraient être toutes celles voulues. Les deux courbes $\alpha'' 6''$, $\alpha' 6'$ seront donc :

$$a^2 (x-l)^2 + b y^2 + c^2 (x-l) y + d^2 = 0,$$

$$\text{et } a^2 x^2 + b^2 (y-l')^2 + c^2 x (y-l') + d^2 = 0,$$

c'est-à-dire deux ellipses identiques à la première transportées à des distances l et l', parallèlement à l'axe des x et à l'axe des y. La solution se réduit en réalité à un transport de courbe.

559. Au point de vue pratique, l'emploi de deux barres qui

représentent les deux coordonnées, qui se coupent et portent deux rainures pour emboîter l'outil qui trace la courbe, est défectueux. Pour le cas de simples tracés de courbes, la disposition équivalente que ce double système a pour but de remplacer serait préférable. Elle consisterait à faire communiquer un mouvement convenable au plan sur lequel la courbe doit être tracée par l'action d'une des barres, pendant qu'une seule pièce portant l'outil tracerait la courbe sur ce plan par l'effet du mouvement relatif des deux coordonnées.

560. Dans le cas où les vitesses du mouvement rectiligne ne seraient pas égales, si $\frac{m}{n}$ est le rapport des vitesses, l'une des barres portera une courbe représentée par la même équation que celle de la courbe, en multipliant par m la coordonnée de cette courbe qui ne doit pas être fournie par son mouvement, et l'autre courbe obtenue en multipliant l'autre coordonnée par n. Les deux coordonnées qui doivent se correspondre pour donner la courbe cherchée arriveront ainsi simultanément dans les positions convenables. Les courbes obtenues seront différentes des premières, mais de même degré et de même nature; ainsi, dans l'exemple qui précède, ce seront des ellipses allongées ou raccourcies qui fourniront les mêmes coordonnées que les courbes du cas précédent.

2° MOUVEMENT SUIVANT UNE COURBE PAR MOUVEMENTS CIRCULAIRES.

561. Le seul mouvement circulaire d'un point, l'assemblage à l'aide duquel il est maintenu à une distance constante du centre, ne peut servir qu'à tracer un cercle. Un mouvement circulaire ferait naître un mouvement d'après une courbe, un arc de courbe, par mouvement relatif, c'est-à-dire si l'on communique au plan un mouvement circulaire égal et continu à celui du rayon du cercle. Si celui-ci pousse une pièce dont l'extrémité

est engagée dans un guide courbe, cet effet est produit, mais on voit qu'alors, en réalité, il y a double mouvement, c'est-à-dire mouvement circulaire et mouvement rectiligne simultanés par la variation des rayons veeteurs de l'excentrique. Nous allons étudier dans un instant cette solution en détail, mais auparavant voyons comment la combinaison de deux mouvements de même nature, de deux mouvements circulaires engendrant deux mouvements rectilignes, peut servir à déterminer les deux coordonnées rectilignes d'une courbe, et par suite cette courbe.

Combinaison de deux mouvements circulaires pour obtenir les coordonnées rectilignes d'une courbe.

562. Le mouvement circulaire pouvant se transformer en mouvement rectiligne suivant une loi voulue, à l'aide d'excentriques ayant une forme convenable, il est possible (fig. 445) de tracer une courbe quelconque à l'aide d'un double système analogue à celui déjà décrit pour le cas du mouvement rectiligne, c'est-à-dire à l'aide de règles guidées qu'un ressort applique contre les excentriques, ces excentriques étant montés sur les axes qui sont mus d'un mouvement circulaire. Cette solution n'est guère que la précédente, en y ajoutant le mode spécial du mouvement des coordonnées produit par le mouvement circulaire.

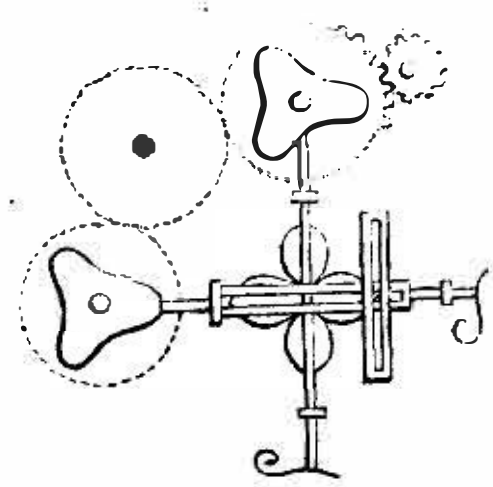


Fig. 445.

Les règles forment deux coordonnées dont l'intersection décrit la courbe voulue; si elles portent toutes deux des rainures, un crayon placé à leur rencontre tracera une courbe. Ce système ne peut guère être de bon usage dans la pratique; on le rendra moins imparfait en assemblant une des règles avec le plan sur lequel doit être tracée la courbe, l'autre règle portant assemblé à son extrémité l'outil qui doit la tracer.

563. Le tracé des excentriques convenables pour chaque cas se déduira facilement de la forme de la courbe à obtenir.

En effet, rapportant la courbe à tracer à des axes de coordonnées parallèles aux règles et passant par les centres de rotation, appelant ρ et ρ' les valeurs variables des rayons vecteurs des excentriques pour les points où les règles les touchent, on aura pour chaque point ainsi déterminé de la courbe à tracer

$$x = \rho + l, \; y = \rho' + l',$$

l et l' étant les longueurs des règles.

La courbe à tracer étant connue, on déterminera un certain nombre m de valeurs de x pour des positions équidistantes réparties sur toute la longueur de la courbe, puis divisant la circonférence de cercle en m parties égales, on portera sur chaque rayon vecteur la longueur correspondante de x, diminuée de la longueur l de la règle. On opérera de même pour obtenir l'autre excentrique.

Si, au lieu d'être la même que celle du premier, la vitesse angulaire de cet excentrique était p fois plus grande, il faudrait porter la longueur déterminée, comme précédemment, sur des rayons faisant des angles la partie m de la circonférence multipliée par p.

Si la courbe à tracer est connue par son équation, celle-ci donnera toutes les valeurs de ρ et ρ', et on pourra remplacer, dans leur expression, ρ et ρ' par $\rho + l$ et $\rho' + l'$, ce qui montre que les relations qui doivent exister entre les rayons vecteurs des deux excentriques sont précisément celles qui lient les coordonnées de la courbe à tracer.

564. On emploie avec avantage la courbe engendrée par deux mouvements circulaires pour l'étude d'un mouvement. Lorsqu'il s'agit d'un mouvement rectiligne, on dispose l'appareil ainsi qu'il suit : Sur un axe mû par une communication du mouvement rectiligne dans un rapport de vitesse constant (par le passage d'une corde chargée d'un poids sur une poulie qu'elle fait tourner, par exemple), et ayant par suite une vitesse proportionnelle à celle de ce mouvement, on monte un plateau sur lequel on peut tracer des lignes. Ce plateau ferait partie du mouvement circulaire, si c'était celui-ci qu'il s'agit

d'étudier : c'est à la même solution que l'étude des deux mouvements est ainsi ramenée.

En avant du plateau recouvert de papier dont nous venons de parler, on dispose une mécanisme d'horlogerie donnant un mouvement de rotation uniforme à un pinceau imbibé d'encre de Chine. Si le disque était immobile, il est clair qu'il tracerait une circonférence de cercle sur le disque E. Mais si celui-ci tourne, le pinceau tracera une ligne courbe qui dépendra à la fois du mouvement du pinceau et de celui du disque. Le mouvement du pinceau étant connu, la forme de la ligne courbe fera connaître le mouvement du disque.

Fig. 446.

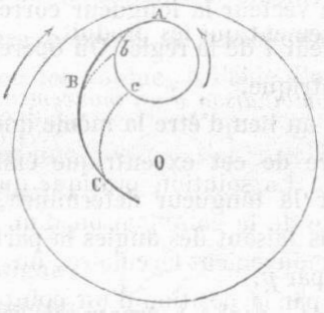


Fig. 447.

Soit A B C la courbe tracée sur le disque par le pinceau, et A *b c* le cercle que le pinceau y eût tracé si le disque n'avait pas été mis en mouvement. Marquons les arcs A *b*, A *c*, que le pinceau qui se meut uniformément parcourt en une seconde.

Le pinceau était au point A lorsque le disque a commencé à se mouvoir. Au bout d'une seconde, le pinceau, au lieu de tracer le point *b*, a marqué le point B, qui est venu se placer sous sa pointe en vertu de la rotation du disque ; celui-ci a donc tourné de l'angle *b*O B pendant la première seconde. Au bout de deux secondes, le pinceau placé en *c* a tracé le point C, donc pendant les deux premières secondes le disque a tourné de l'angle *c*OC, et ainsi de suite pour les secondes suivantes.

De la mesure de ces angles résulte la constatation des lois du mouvement. Ainsi dans le cas des expériences sur le frottement

de M. Morin, le disque étant mû par la corde supportant un poids qui entraînait la caisse qui exerçait le frottement étudié, on a trouvé que les angles des premières secondes étaient entre eux comme les nombres 1, 4, 9, c'est-à-dire qu'ils étaient proportionnels aux carrés des temps employés pour les décrire. Les chemins parcourus par la surface frottante étant proportionnels à ces angles, on voit que le mouvement est semblable à celui dû à la pesanteur, c'est-à-dire à l'action d'une force constante.

C'est ainsi que s'établit la constance de l'intensité du frottement, et l'on voit la précision que peut fournir ce mode d'expérimentation, l'utilité de l'emploi des courbes tracées par deux mouvements circulaires et la manière d'interpréter le double mouvement qui les produit.

Combinaison d'un mouvement circulaire et d'un mouvement rectiligne.

565. La solution pratique qui est généralement la meilleure résulte de la combinaison d'un mouvement rectiligne avec un seul mouvement circulaire, un point d'une courbe étant déterminé par la position d'un point sur une droite faisant un angle voulu avec une droite donnée, ayant tourné d'une certaine quantité comme rayon d'un cercle. Ce système est précisément celui qui est employé pour rapporter une courbe des *coordonnées polaires*, pour en obtenir l'équation dans laquelle on fait entrer comme variables la longueur du rayon vecteur et l'angle qu'il fait en chaque instant avec sa position initiale.

On ne doit pas s'étonner de rencontrer ici, comme solution du problème consistant à décrire une courbe, les deux systèmes de coordonnées qu'emploie la géométrie analytique, car c'est réellement sur la notion de continuité du mouvement que repose la conception de celles-ci, et surtout bien clairement celle des coordonnées polaires. C'est un des exemples les plus importants et les moins contestables de l'introduction de la cinématique dans la géométrie.

566. Voyons comment on peut résoudre le problème prati-

quement. Soit d'abord une courbe fermée dans l'intérieur de laquelle on peut trouver un point tel que toutes les droites qui passent par ce point ne puissent rencontrer la courbe qu'en deux points.

Soit ABD cette courbe (fig. 448), menons par le point C, centre du mouvement circulaire, une ligne diamétrale PQ, et sur cette ligne assemblons une droite OT, qui ne puisse que glisser suivant sa longueur. L'extrémité O tracera évidemment la courbe ABD, si l'extrémité T se meut par l'effet d'une cheville passant dans une rainure, suivant une courbe telle que l'équation de la courbe à tracer étant en coordonnées polaires $\rho = \varphi(\omega)$, celle de la courbe directrice soit, l étant la longueur OT, $\rho' = \rho - l = \varphi(\omega)$, courbe liée à la première par une relation bien simple.

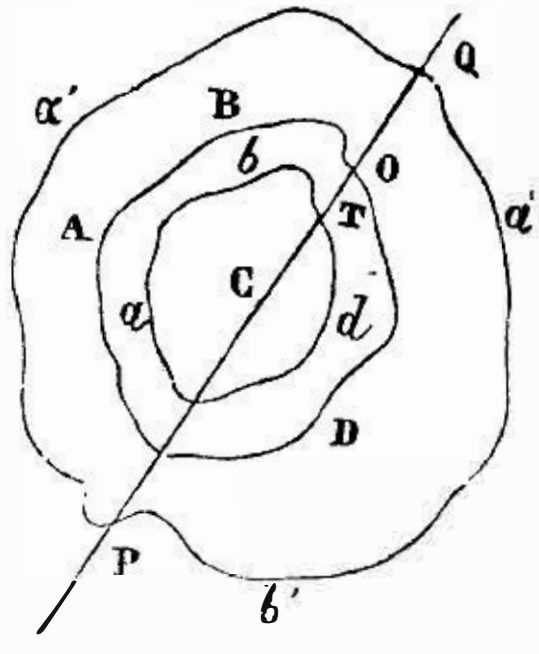


Fig. 448.

Le tracé de la courbe directrice s'obtiendra donc en diminuant d'une quantité l tous les rayons vecteurs de la courbe à obtenir mécaniquement.

Cette courbe est une *conchoïde*, nom donné plus spécialement au cas où la ligne à laquelle sont menés tous les rayons vecteurs que l'on prolonge d'une quantité constante pour obtenir la courbe, est une ligne droite; elle est tracée au moyen d'un mouvement circulaire et d'une courbe directrice qui, comme nous l'avons vu pour les excentriques, fournit le moyen d'obtenir, à l'aide d'un mouvement circulaire, le mouvement rectiligne suivant une loi donnée d'une barre guidée en ligne droite.

567. Examinons maintenant le cas des courbes fermées, pour lesquelles on ne peut trouver un point tel que toutes les lignes passant par ce point ne rencontrent la courbe qu'en deux points, telle par exemple que la courbe β, faisant un nœud en B (fig. 449). Le problème n'est pas soluble comme ci-dessus, car alors le rayon vecteur ne peut avoir qu'une seule valeur

pour chaque position, et ne peut fournir le tracé de plus de deux points d'une même courbe pour chaque tour de rotation.

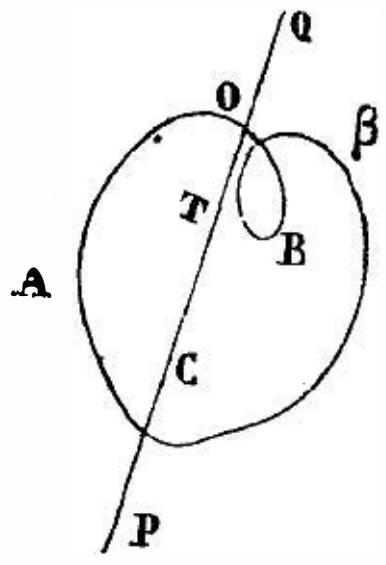


Fig. 449.

Mais si on fait mouvoir la ligne OT non plus suivant PQ, mais suivant une direction faisant un angle constant avec le rayon vecteur, le point T peut alors décrire le nœud de la courbe.

En effet (fig. 450), quand PQ sera passé à la position P′Q′, si le point O s'approchant du centre C, vient en O′, le point T passera en T′ et aura éprouvé un mouvement rétrograde relativement à celui de PQ, le tracé pourra donc avoir lieu en général.

On ne peut donner une méthode générale pour déterminer l'angle COT que doit faire la ligne OT avec le rayon vecteur, ni la longueur OT la plus convenable pour tracer une courbe donnée. Ce sera à l'aide des données spéciales à chaque cas, ou

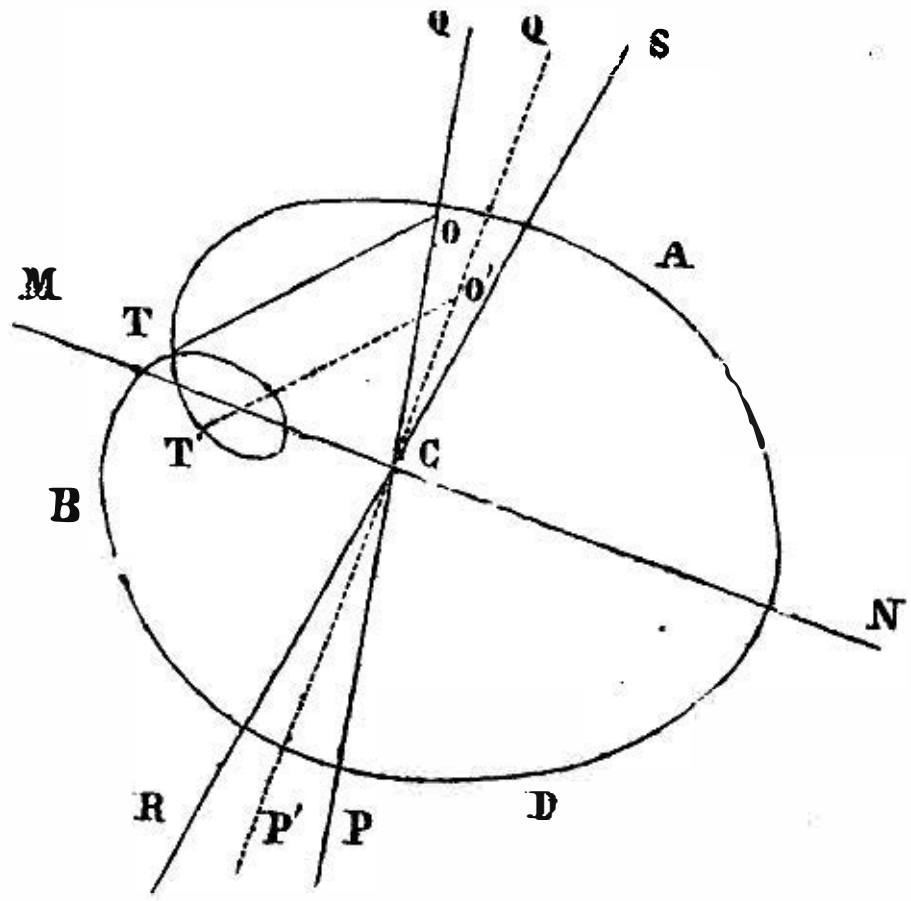


Fig. 450.

par quelques tâtonnements, qu'on parviendra à les déterminer. On pourrait dans tous les cas calculer cette courbe pour chaque

valeur adoptée; mais cette possibilité théorique n'a pas de valeur d'application.

568. En effet, la courbe cherchée qui doit être tracée par le point T (fig. 450) étant donnée par son équation en coordonnées polaires $\rho = \varphi(\omega)$, CT étant le rayon vecteur ρ, MCT étant l'angle ω, et pour déterminer la courbe directrice que doit suivre le point O, le triangle TOC donne :

$$\sin. TCO = \frac{OT \sin. TOC}{CT} \text{ ou } TCO = \text{angle} \left(\sin. \frac{OT \sin. TOC}{CT} \right).$$

Posant la longueur constante $OT = l$ et l'angle constant $TOC = \alpha$, $TCO = \text{ang.} \left(\sin. \frac{l \sin. \alpha}{\rho} \right)$.

Cet angle ajouté à l'angle $TCM = \omega$, correspondant au point T de la courbe, fera donc connaître l'angle $OCM = \omega'$ et la longueur $OC = \rho'$, puisque tout est déterminé dans le triangle OCT. On aura donc l'équation en coordonnées polaires de la courbe décrite par le point O, courbe qui devra être de la nature de celles étudiées en premier. Son équation générale sera

$$\omega' = \omega + \text{ang.} \left(\sin. \frac{l \sin. \alpha}{\rho} \right), \rho' = OC = l \cos. \alpha + \sqrt{\rho^2 - l^2 \sin.^2 \alpha}.$$

Les valeurs de ρ et ω permettront en chaque instant de calculer ρ' et ω', et l'on déterminera l'angle α et la longueur l, de telle sorte qu'elle puisse fournir une équation de la courbe directrice du point O, telle qu'elle soit une courbe sans nœuds (1).

569. Nous avons supposé dans ce qui précède que l'on faisait mouvoir le rayon vecteur d'un mouvement circulaire, et qu'en même temps on déterminait un mouvement rectiligne suivant la longueur de ce rayon; nécessairement alternatif pour obtenir toute courbe fermée.

La barre suivant laquelle se produit le mouvement rectiligne étant entrainée circulairement, on voit qu'il se produit ici un

(1) L'équation en coordonnées rectilignes d'une courbe qui peut être rencontrée par une droite en m points étant du degré m, on comprend que les calculs ci-dessus indiqués seraient toujours d'une extrême complication et le plus souvent échapperaient aux ressources de l'analyse.

phénomène d'une nature différente de ceux étudiés jusqu'ici; les guides du mouvement rectiligne ne sont plus absolument fixes, comme nous l'avons supposé jusqu'à présent. Chaque point de la barre qui décrit une ligne droite pendant que celle-ci est mue d'un mouvement circulaire, par l'effet de deux mouvements simultanés, parvient identiquement à la même position que si les deux mouvements s'étaient succédés. L'étude des effets produits par ce transport général sera l'objet du chapitre suivant.

Dans la pratique et malgré la simplicité théorique du système de coordonnées polaires, il y a avantage à communiquer à la surface sur laquelle doit être tracée la courbe un mouvement circulaire, et à produire séparément le mouvement rectiligne de la barre, cette direction se confondant avec l'axe de la barre qui tout entière, ou seulement le point O de celle-ci, se meut dans la direction d'un rayon passant par le centre du cercle.

570. Reprenons les deux cas qui correspondent aux deux positions de la ligne OT relativement au rayon vecteur, c'est-à-dire aux deux genres de courbes précédemment indiqués, et voyons ce que deviennent dans la pratique les procédés auxquels nous sommes conduits par l'emploi des guides simples.

I. Dans les arts, l'organe qui communique le mouvement rectiligne au porte-outil est presque toujours la vis (la crémaillère, les cordes pourraient être également employées), l'écrou étant en général le porte-outil. La vis et la surface sur laquelle le tracé doit être fait étant mues par les deux roues d'un même engrenage, fourniront les deux cas suivants:

1° L'axe de la vis qui met l'outil en mouvement étant parallèle à la surface sur laquelle on veut tracer une courbe et passant par le centre de rotation, cet outil s'avancera des longueurs ρ, ρ', pendant qu'un rayon de la surface décrit les angles ω, ω', et si les deux mouvements sont uniformes, on a $\frac{\rho}{\omega} = a = \text{Const.}$; c'est-à-dire qu'on trace ainsi une courbe plane, une spirale d'Archimède ($\rho = a\omega$), par deux mouvements uniformes.

Il est facile de déterminer a d'après le rapport des rayons des roues de l'engrenage et le pas de la vis. En effet, on a $r\omega = r'\omega'$, r, r' étant les rayons des roues qui font tourner la surface et la vis, p étant le pas de la vis, $\frac{p}{n}$ sera la progression de l'écrou pour une partie n d'un tour égal à $r'\omega' = \frac{2\pi r'}{n}$. Donc en chaque instant $\rho = \frac{p}{n}$, $\omega = \frac{r'\omega'}{r} = \frac{2\pi r'}{rn}$ et $\frac{\rho}{\omega} = \frac{rp}{2\pi r'}$, quantité constante.

2° L'axe du mouvement circulaire est parallèle à la direction du mouvement rectiligne, ou peu incliné sur celle-ci, et la direction de l'outil passe par l'axe du mouvement circulaire.

Le tracé de la courbe sera fait sur la surface d'un cylindre. Si les deux mouvements sont uniformes, si le cylindre et la vis sont menés par deux roues dentées engrenant ensemble, on aura un système à l'aide duquel on pourra tracer une hélice sur la surface du cylindre, à l'aide duquel on pourra tailler sur un cylindre une vis d'un pas quelconque en disposant de roues d'engrenage dont les rayons soient dans un rapport convenable.

En effet, R étant le rayon de la roue montée sur l'axe du cylindre, pour un tour de la roue de rayon r' montée sur l'axe de la vis, l'écrou avance du pas p de cette vis et trace une fraction d'hélice sur le cylindre (puisque le mouvement rectiligne et le mouvement circulaire sont uniformes).

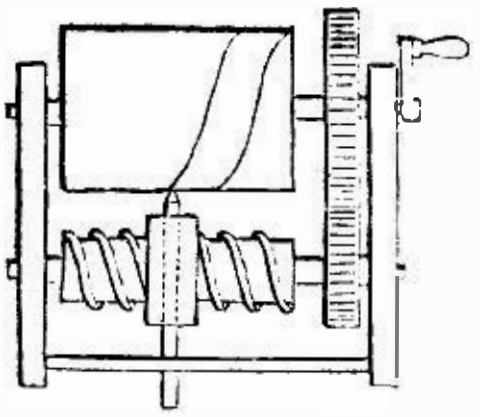


Fig. 451.

Le pas P de cette hélice sera égal à $\frac{pr'}{R}$, car les pas de l'hélice qui met l'outil en mouvement et de celle tracée sur le cylindre correspondent chacun à un tour de chaque roue d'engrenage, $2\pi R$, $2\pi r'$, c'est-à-dire qu'on a :

$$P : p = r' : R, \text{ d'où } P = \frac{pr'}{R}.$$

On obtiendra donc telle valeur qu'on désirera de P en faisant varier convenablement le rapport $\frac{r'}{R}$.

Remarquons qu'au lieu de faire marcher l'outil et tourner le cylindre, on pourrait théoriquement faire avancer le cylindre selon son axe et tourner l'outil.

Presque tout l'art du tour repose sur les considérations précédentes. Il est évident qu'en resserrant suffisamment le pas des spirales et des hélices, ou en employant des outils suffisamment larges, de manière que leurs traces se superposent, ces systèmes fournissent le moyen d'obtenir à l'aide du tour des surfaces plates, des cylindres, des cônes, etc.

571. II. C'est encore dans l'art du tour que la seconde solution, qui permet le tracé des courbes de formes accidentées, trouve son application, dans un genre de tour dit *tour à guillocher*, qui sert à tracer des ornements sur des surfaces à l'aide d'une courbe directrice. En se reportant à la fig. 450, la courbe directrice sur laquelle s'appuie le point O est appelée *rosette*, la règle OT qui porte l'outil en T se nomme la *touche*.

La question géométrique, qu'il faut résoudre à chaque instant dans l'emploi de cet instrument, peut s'énoncer ainsi : *Trouver une rosette pour une courbe donnée*. Ce qui revient à astreindre le mouvement rectiligne à se produire suivant une loi convenable, loi qu'une courbe peut représenter.

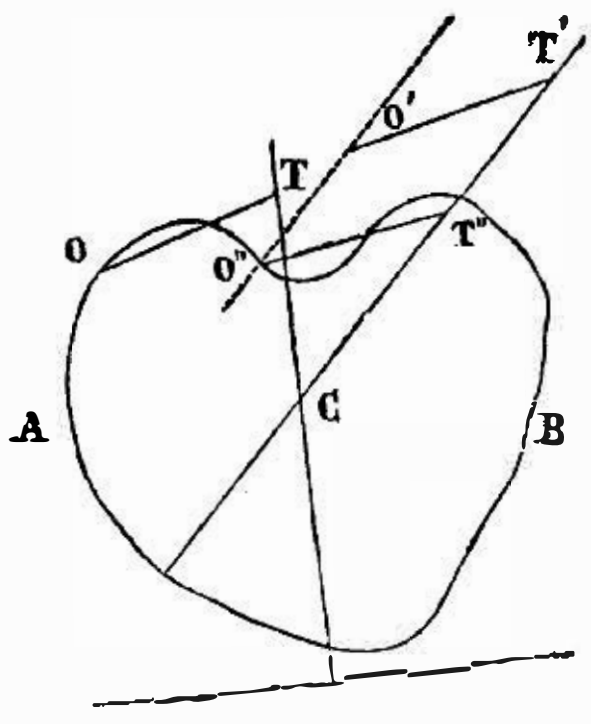


Fig. 452.

572. Ce problème est facilement résolu par un tracé. En effet, soit AB la courbe à reproduire (fig. 452), et CT, CT′... des rayons vecteurs. On connaît l'inclinaison CTO de la touche sur chaque rayon vecteur et la longueur OT. Prenant un point quelconque T′ sur un de ces rayons, nous pourrons tracer T′O′, menant par O′ une parallèle à CT′, le point O″ de la courbe

sera le point qui devra être tracé par la touche, le point T′ étant en T″, point de rencontre avec C′ T′ de la ligne O″ T″ parallèle à O′ T′. La suite des points ainsi déterminés donnera le tracé de la rosette.

573. MM. Lantz et Bétancourt ont décrit un petit instrument fort simple inventé par la Condamine pour tracer avec facilité une rosette correspondant à une courbe donnée, et permettre par une opération simple de déterminer les rosettes qui correspondent à divers points pris pour centres des rayons vecteurs, afin d'adopter le tracé qui fournit la rosette la moins anguleuse, celle qui convient le mieux, par suite, pour le travail du tour.

ABCD (fig. 453) est une règle percée d'une rainure dans toute sa longueur; sur la partie AB s'assemble une pointe, si l'on veut obtenir seulement la conchoïde de la courbe cherchée, une barre OB dans le cas que nous traitons ici. La règle ABCD est embrassée par les tenons E et G d'une seconde règle, percée aussi d'une rainure, et pouvant glisser sur la première, un barillet L monté sur la règle EG et assemblé par un fil à l'extrémité de la

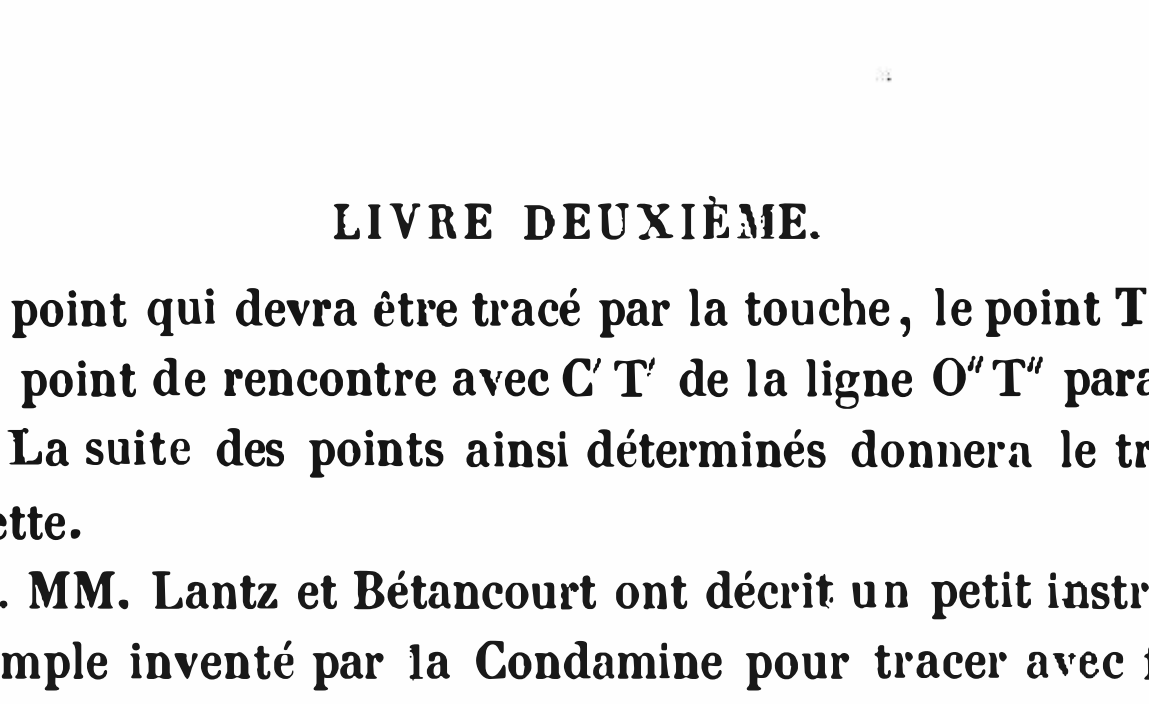


Fig. 453.

première règle tend à produire cet effet. Une pointe N, faisant corps avec ABCD, tendra donc à se rapprocher du centre fixe P formé par une troisième pointe assemblée avec la deuxième règle.

Soit T le contour d'une tête, par exemple (et il est curieux

de voir que la Condamine semblait se poser, en 1730, le problème résolu de nos jours par l'invention du tour à portrait), pour lequel on cherche la rosette la plus convenable. Après avoir découpé ce profil sur une carte, on le colle sur une autre RS. Ensuite on prend à volonté un point P pour centre; on perce les deux cartes en ce point, et on les attache sur un plan en y enfonçant la pointe P; après quoi, on applique la pointeN sur le contour du relief de la tête découpée; on tourne ensuite à la main tout le système, en faisant toujours porter la pointe N sur le bord de la découpure; ou, mieux encore, on ne fait que tourner d'une main la carte sur son centre, en tenant de l'autre la machine fixe, et en faisant attention à ce que la pointe N ne quitte pas le bord de la carte découpée, action que facilite l'effet du ressort renfermé dans le barillet. La pointe B tracera la rosette cherchée.

Du tracé des courbes.

574. Ce qui précède renferme l'exposé des méthodes pouvant conduire au tracé des courbes à l'aide de mouvements rectilignes ou circulaires combinés. Les résultats obtenus semblent peu importants quant à la variété des courbes qu'il est possible d'obtenir sans guides spéciaux, si l'on observe que les plus grands géomètres du siècle dernier, Descartes, Pascal, Roberval, de Lahire, Réaumur, Newton, Mac-Laurin, etc., se sont beaucoup occupés de la question. Ce sont surtout les courbes engendrées lors du roulement, du transport des guides, les curieux théorèmes fournis par la cycloïde notamment, qui avaient fait concevoir l'espoir de résultats qui n'ont pu être atteints. Laissant de côté pour un instant ce cas où le guide du mouvement se transporte lui-même, moyen simple de tracer la courbe engendrée par le mouvement relatif d'un point, et qui, comme nous le prouverons bientôt, ne peut, avec l'emploi des guides des mouvements simples, fournir que le tracé d'une famille particulière et limitée de courbes, nous passerons en revue les prin-

cipaux résultats obtenus dans les divers systèmes de coordonnées, les moyens de tracer des courbes sans directrice spéciale. La solution toujours possible dans le cas contraire, n'est pas supérieure à la construction d'une courbe par points, puisqu'il faut partir de courbes aussi difficiles à obtenir, qu'on ne sait construire que de cette manière.

Nous supposerons toujours, dans ce qui va suivre, lorsque le système de coordonnées comportera deux monvements, qu'ils seront dans un rapport de vitesse constant; il n'en saurait être autrement, en général, qu'en employant pour produire un mouvement varié, des courbes d'une nature analogue à celle des courbes à tracer, ce qui ne rentre plus dans le cas considéré ici.

575. 1° *Un mouvement rectiligne* ne peut engendrer qu'une ligne droite, c'est la règle qui sert à tracer celle-ci.

2° *Deux mouvements rectilignes* correspondent au système ordinaire de coordonnées. Ils permettent de tracer toute espèce de courbes, mais en employant des courbes directrices de même nature que la courbe à tracer.

Un point d'une droite portant deux saillies qui glissent dans deux rainures droites, qui ont par suite des mouvements rectilignes de vitesses variables (mesurées, comme on l'a vu, par des projections sur les axes), trace un *ellipse*. Ce curieux tracé rentre dans la série de ceux que nous étudierons plus loin. Nous traiterons en même temps du cas où deux points de la droite sont assujettis à suivre deux circonférences de cercle.

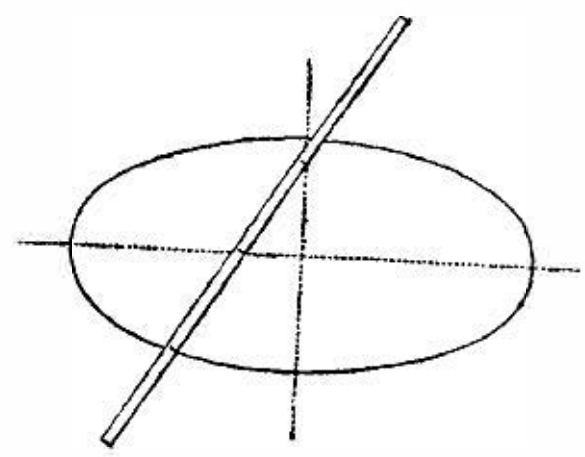


Fig. 454.

3° *Un mouvement circulaire* ne peut tracer qu'une circonférence du cercle; c'est le compas qui est employé à cet effet, instrument presque aussi simple que la règle pour tracer une ligne.

4° *Un mouvement circulaire et un mouvement rectiligne :* c'est le système des coordonnées polaires.

La vis, la crémaillère, qui donnent un mouvement rectiligne

ayant un rapport de vitesse constant avec la vitesse de rotation, permettent d'obtenir facilement les tracés :

De la spirale d'Archimède ($\rho = a\omega$) sur le plan de rotation ;

De l'hélice sur le cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe de rotation ;

D'une ligne héliçoïdale sur un cône droit, dont la projection est une spirale d'Archimède, les génératrices de ce cône étant inclinées sur l'axe de rotation.

Le mouvement rectiligne produit par le glissement dans des rainures, lorsque les guides qui limitentnle mouvement sont ou une ligne droite ou un cercle, fournit le tracé de la *conchoïde* et du *limaçon de Pascal*.

Soit D D une directrice rectiligne ; menons par le centre O une droite quelconque, et à partir du point C où elle coupe la droite, prenons une longueur constante C M = a ; le lieu des points ainsi déterminés appartient à la courbe dite *conchoïde* proprement dite. Elle sera obtenue par le mouvement du

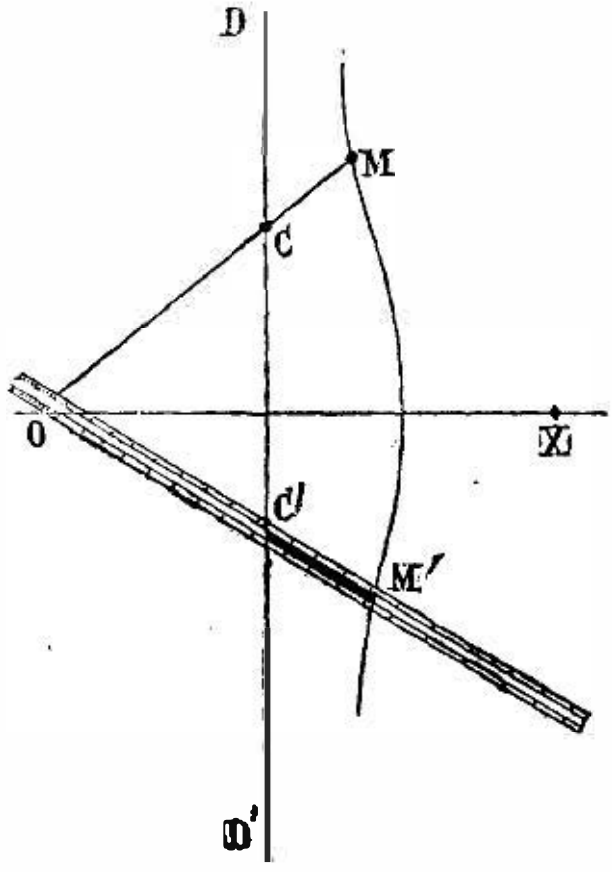


Fig. 455.

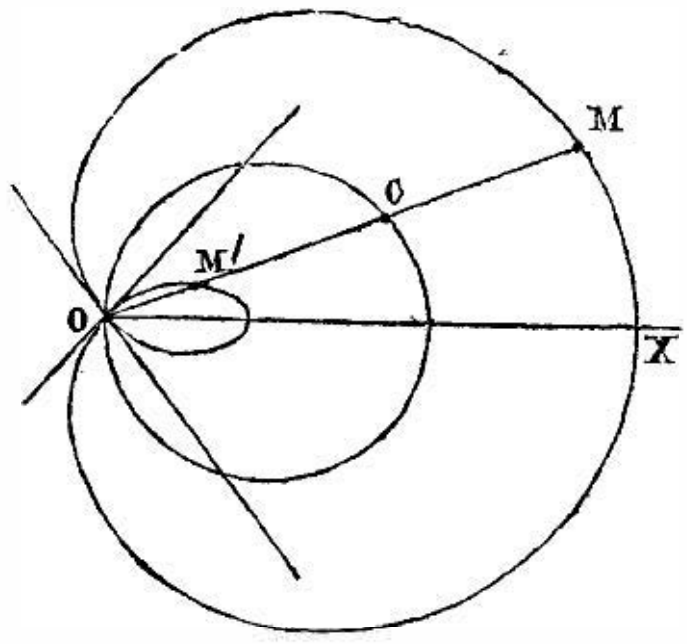


Fig. 456.

rayon O M portant une partie glissante C M, dont la cheville C sera assujettie à glisser dans une rainure pratiquée suivant D D′.

La conchoïde a deux branches, puisqu'on peut porter la longueur C M des deux côtés du point C.

Si au lieu d'une droite on prend pour directrice une circonférence de cercle, et pour pôle un point situé sur cette circonférence, on a le *limaçon de Pascal*, courbe obtenue en portant sur une corde mobile, à partir du point de rencontre avec la circonférence, une longueur constante $CM = CM' = a$.

On peut évidemment obtenir ce tracé avec des rainures et une pièce glissante, comme dans le cas précédent.

Il est facile de voir qu'en coordonnées polaires, l'axe polaire étant la ligne OX, l'équation de cette courbe est

$$\rho = 2r \cos. \omega \pm a.$$

En dehors de ces courbes, on ne peut tracer la *conchoïde* d'une courbe donnée que par l'emploi d'une *rosette* de même ordre que la courbe à tracer, en se servant d'une courbe directrice qui fasse croitre le rayon vecteur pour chaque angle décrit suivant une loi déterminée.

5° *Deux mouvements circulaires* ne peuvent donner des courbes qu'en raison des lois de ces mouvements, ce qui revient à dire en raison de la nature des courbes qui transforment en mouvements convenables les mouvements de rotation des arbres à rapport de vitesse constant, courbes qui équivalent en réalité à de véritables *rosettes* montées sur leurs axes. Il n'y a d'exception que pour la famille de courbes correspondant au rapport de vitesse constant; ainsi lorsque l'un des mouvements circulaires est entraîné par l'autre, on a un moyen simple de tracer les courbes de la famille des épicycloïdes; on arrive de même à tracer les développantes de cercle. Ces questions seront étudiées aux *combinaisons de vitesses*.

6° *Coordonnées focales.* Un système de coordonnées qui peut s'appliquer assez facilement en mettant à profit la flexibilité des cordes, est le système de coordonnées focales, dans lequel la position d'un point est définie par la distance d'un point à deux points fixes, ou à un point et à une droite fixe. Il four-

nit un mode de génération pour les courbes du second degré, qui ont des équations très-simples dans ce système, savoir :

L'ellipse $\rho + \rho' = 2a$;

L'hyperbole $\rho - \rho' = 2a$;

La parabole $\rho = \rho'$, ρ' se rapportant à la distance à une droite fixe.

Ellipse. — Si on prend un fil de longueur égale à la somme des rayons vecteurs, qu'on en attache les extrémités à deux pointes fixées aux foyers et qu'on tende le fil à l'aide d'un style, tout point marqué par le style ainsi guidé appartiendra à l'ellipse, qui sera ainsi tracée d'un mouvement continu.

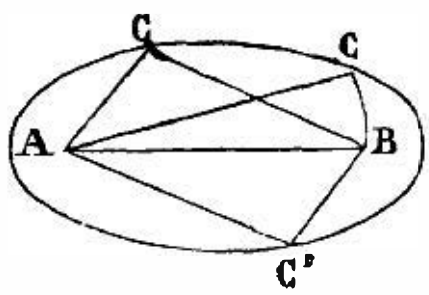


Fig. 457.

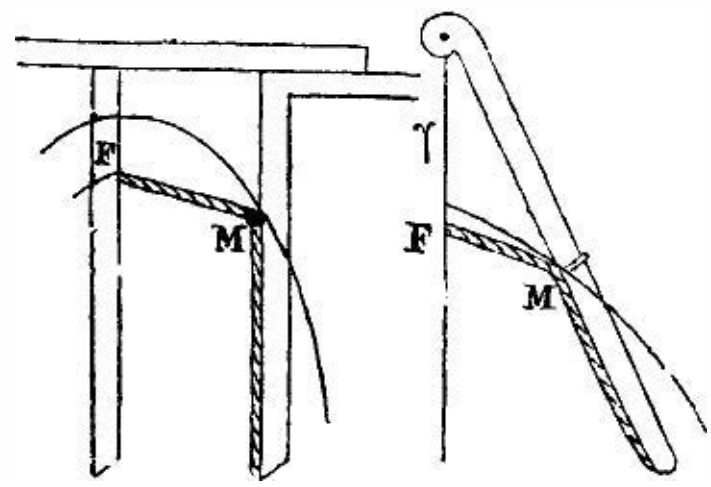


Fig. 458.

Fig. 459.

Hyperbole. — F étant un foyer de l'hyperbole (fig. 459) auquel est fixée l'extrémité d'un fil; si on appuie ce fil contre un rayon d'un cercle dont le centre soit à l'autre foyer, un style tendant toujours le fil tandis que le rayon s'éloigne de l'axe trace l'hyperbole, puisque la différence des rayons vecteurs reste constante.

Parabole. — Un fil étant de même attaché au foyer F (fig. 458), si on le tend contre le côté d'une équerre dont le long côté a une longueur égale à celle du fil, lors du mouvement de glissement de cette équerre un style placé à la rencontre du fil et de la branche de l'équerre tracera une parabole.

On voit que grâce à la flexibilité des fils, les propriétés des sections coniques fournissent un moyen de les tracer par des combinaisons assez simples.

576. *Développantes.* — La flexibilité des fils fournit le moyen

de tracer par le simple mouvement circulaire d'un fil toujours tendu et préalablement enroulé autour d'une courbe, la développante de cette courbe. Les développantes de cercle sont donc d'un tracé facile, grâce à ce mode particulier de génération.

MOUVEMENT D'APRÈS UNE COURBE EN MOUVEMENT RECTILIGNE OU CIRCULAIRE.

577. Le problème inverse de celui dont nous venons d'indiquer les solutions, c'est-à-dire la transformation du mouvement d'après une courbe donnée en mouvement rectiligne ou circulaire, ne se présente pour ainsi dire jamais dans les machines, dans lesquelles on évite ce genre de mouvement, à cause des résistances qui l'accompagnent nécessairement. En effet, la pièce qui doit se mouvoir devrait communiquer le mouvement rectiligne ou circulaire en pressant sur une courbe par une cheville assujettie dans une rainure ayant la forme de la courbe donnée. C'est assez dire combien ce mouvement est impossible en général, et dans quelques cas exceptionnels où il serait possible, il serait accompagné d'énormes résistances, aussi jamais on ne donne semblable mouvement aux organes de communication ; le mouvement suivant une courbe n'étant employé que pour les opérateurs, c'est-à-dire pour les derniers organes.

Sans donc nous arrêter longuement sur cette questions, nous ferons comprendre comment il est théoriquement possible de

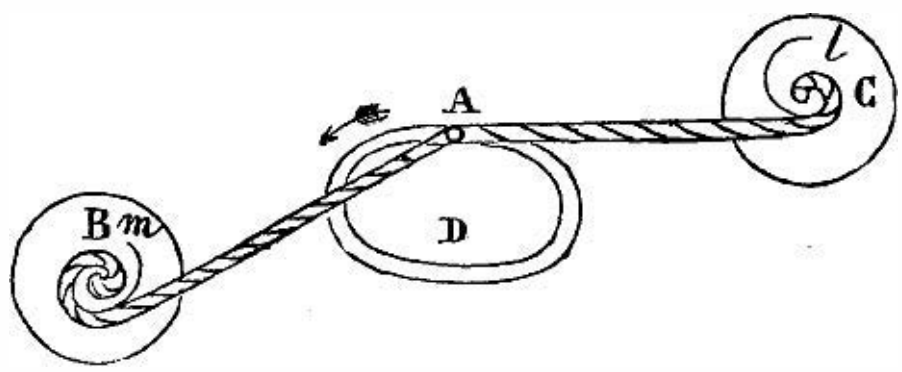


Fig. 460.

transformer le mouvement suivant une courbe en un mouvement circulaire. Soit A un point décrivant la courbe AD (fig. 460), une

cheville, par exemple, poussée par un rayon tournant autour d'un axe, et forcée de se mouvoir dans une rainure ayant la forme de cette courbe. Si l'on suppose qu'une corde attachée à cette cheville vienne à s'enrouler sur une spirale en forme de *fusée* C, l'axe de celle-ci prendra, par le mouvement de la cheville dans le sens de la flèche, un mouvement circulaire, et il sera toujours possible de donner à cette spirale une forme telle que l'arc enroulé dans l'unité de temps soit d'un même nombre de degrés, et par suite d'obtenir au besoin un mouvement circulaire uniforme, quelles que soient la forme de la courbe et la vitesse de la cheville A dans cette courbe.

Lorsque la direction du mouvement change, le système ne donne plus de mouvement circulaire en C, mais il pourra agir sur une fusée B placée de l'autre côté de la courbe; de même pour tous les changements de direction. Il est d'ailleurs facile, à l'aide de ces mouvements circulaires intermittents, mais dont un a toujours lieu, de faire mouvoir régulièrement une poulie à l'aide de courroies (droites ou croisées, pour que l'action ait toujours lieu dans le même sens), en faisant en sorte que la communication s'interrompe et reprenne à un moment convenable par un des systèmes d'embrayages que nous expliquerons plus loin, par exemple, à l'aide de rouleaux de tension dont l'action dépendrait de la position de la cheville motrice. Des ressorts devraient toujours tendre à enrouler la corde. On voit à quelle complication on arrive pour réaliser une solution imparfaite du problème; nous avons voulu montrer seulement qu'elle n'était pas impossible.

MOUVEMENT SUIVANT UNE COURBE DÉTERMINÉE EN MOUVEMENT SUIVANT UNE AUTRE COURBE ÉGALEMENT DÉTERMINÉE.

578. Les solutions qui précèdent, et dans lesquelles en général une courbe quelconque est obtenue à l'aide de mouvements rectilignes de vitesses variables, en raison de la nature de courbes directrices, fournissent la solution du problème, dans le cas par-

ticulier où les deux courbes ont entre elles les relations convenables à cette reproduction. Quand ces deux courbes sont quelconques, on pourrait, si la réciproque indiquée dans l'article précédent était possible, transformer le mouvement suivant la première courbe en des mouvements circulaires ou rectilignes, puis ceux-ci en mouvement suivant la seconde courbe. Pratiquement on ne saurait adopter une semblable solution.

Comme nous l'avons dit, le mouvement d'après une courbe ne sert dans les machines que pour donner à l'outil des mouvements nécessités par la nature du travail, et ne peut être employé pour des communications de mouvement. Ce n'est donc que pour l'opérateur que le mouvement suivant une courbe est nécessaire, et la machine est terminée à cette dernière transformation.

579. *Pantographe.* — Il est un seul cas où le mouvement doit passer nécessairement d'une courbe à une autre courbe, et qui est d'un usage fréquent dans les arts graphiques, c'est le cas où il s'agit d'obtenir une courbe semblable à une autre courbe, c'est-à-dire deux courbes telles que tous les rayons vecteurs qui leur sont menés d'un même centre soient dans un rapport constant, et que les éléments de ces courbes soient semblables et semblablement placés.

L'instrument dont on se sert dans ce cas, et avec lequel les conditions établies ci-dessus sont satisfaisantes, est le pantographe (fig. 461). Il se compose de deux règles articulées en un point A. Aux points B et C sont articulées deux autres règles telles que AB = AC = BDe= CD. Quel que soit l'angle en A, ces quatre lignes formeront un losange. I étant le pivot autour duquel tourne le système, F un traçoir assujetti à suivre les contours du dessin ; le point E en lequel sera placé un crayon, tracera des figures semblables à la première; ce qu'on démontre facilement. En effet, quelle que soit la position des

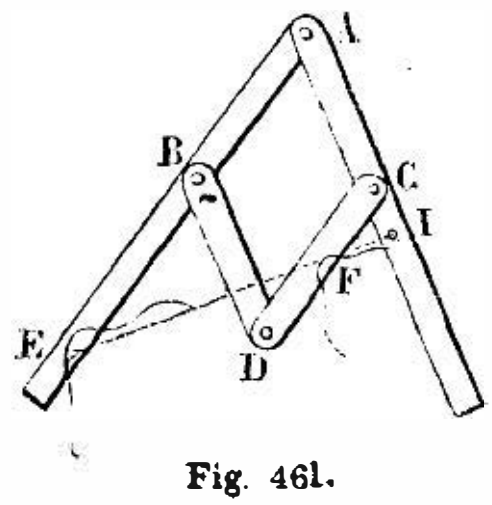
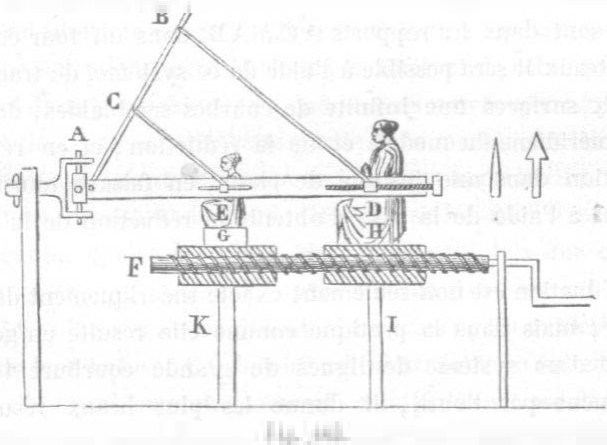


Fig. 461.

branches, on aura toujours, en tirant la ligne droite EFI, à cause de la similitude évidente des deux triangles EAI, FCI : EI : FI = AC : CI = AE : CF, la position du point E sera donc toujours la même sur la branche AB ; et le rapport de droites menées du point I restera constant, puisque les termes AC, CI sont constants ; alors tous les éléments des courbes seront semblables et parsuite celles-ci.

580. Nous avons supposé, dans ce qui précède, les courbes tracées sur un plan, mais on peut de même obtenir des courbes successives d'une surface, produire mécaniquement une surface semblable à une surface donnée. C'est ce qu'a réalisé M. Collas dans l'ingénieuse machine qu'il a inventée pour la réduction des statues.

La figure 462 en représente un croquis. Soit AD une barre en



bois dans laquelle sont pratiquées de sa rainures longitudinales dans lesquelles peuvent glisser dans l'une une touche, et dans l'autre un outil. L'extrémité A de cette barre est terminée par un joint universel, qui lui permet de prendre toute direction. De cette extrémité part une bielle articulée BC, qui en porte deux autres articulées également, attachées l'une à la touche et d'autre au burin, et de longueur telle que l'on ait AC : AB = CE : BD, que les triangles ACE, ABE soient toujours semblables.

Il en résulte que si l'on fait glisser le coulisseau de la touche sur la barre d'une petite quantité, ce que l'on fait à l'aide d'une vis pour obtenir de petits mouvements, le coulisseau du burin glisse aussi et dans le même sens; et la touche et le burin traceront une succession de courbes toujours semblables et semblablement placées.

Il sera facile, d'après cela, d'obtenir la réduction d'une surface quelconque. En effet, plaçons devant la touche D un modèle H, supporté par un plateau garni d'une roue dentée; et devant l'outil E une masse molle placée sur un plateau garni d'une roue dentée égale à la première; ces roues dentées étant conduites par une même vis qui leur fait faire en même temps des rotations égales autour de leur axe, il est clair que si ces plateaux sont disposés de telle sorte que l'outil et la touche soient placés de manière à correspondre à deux circonférences dont les diamètres sont dans les rapports AC à AB, dans un tour complet des plateaux il sera possible à l'aide de ce système, de tracer sur les deux surfaces une infinité de courbes semblables, dans les plans méridiens du modèle et de la réduction; et en répétant l'opération dans une infinité de plans, en faisant tourner les plateaux à l'aide de la vis, d'obtenir la réduction de la statue modèle.

La réduction est non-seulement exacte théoriquement dans ce système, mais dans la pratique comme elle résulte en général de celle d'un système de lignes de grande courbure tracées directement par l'outil, il donne les plus beaux résultats, parce que ce sont ces lignes qui représentent le mieux la surface, et que c'est leur perfection qui donne surtout à une statue sa valeur artistique.

COMBINAISON DE VITESSES

OU MOUVEMENTS DIFFÉRENTIELS.

581. Lorsque divers organes sont mis en communication pour constituer l'ensemble de ce que nous appelons une machine, une partie fixe que l'on nomme le bâti porte les coussinets qui maintiennent les axes du mouvement circulaire et les prisons les guides du mouvement rectiligne. Si l'on donne à tout l'ensemble qui constitue la machine une certaine vitesse, rien ne sera changé dans les mouvements relatifs des diverses pièces qui sont le résultat du mécanisme.

Si l'on imprime par une action extérieure à un élément d'une machine, un mouvement quelconque différent de celui qu'il peut prendre dans la machine, en général mais non toujours, la communication cessera entre cette partie de la machine et les autres. Il en sera autrement, il y aura ce que nous appelons des vitesses combinées résultant de deux vitesses, si les mouvements que prennent les guides des pièces ainsi mues sont tels que celles-ci continuent à agir l'une sur l'autre comme dans les cas étudiés jusqu'ici, où nous avons considéré les axes et les guides comme fixes de leur nature. Ce dernier cas n'est donc qu'un cas particulier d'un problème plus général, celui où la vitesse des guides des pièces se réduit à zéro. C'est ce que nous allons rendre clair par un exemple.

Lorsqu'un organe de communication de mouvement, une vis par exemple, se meut, la vitesse du mouvement de rotation de la tête de la vis est à son mouvement rectiligne dans le rapport du rayon de cette tête au pas de la vis.

Mais ceci suppose que l'écrou est fixe, ce qui n'est qu'un cas particulier du mouvement, celui qui correspond à la vitesse zéro ; si, au contraire, il pouvait se mouvoir comme la vis, la

vitesse de celle-ci serait évidemment modifiée; si, par exemple, il tournait en même temps que la vis avec une vitesse angulaire de rotation variant de zéro à celle même de la vis, la translation rectiligne de celle-ci dans le même temps varierait de la longueur du pas à zéro.

On voit que dans une disposition semblable la vitesse absolue d'un organe change suivant la vitesse des guides du mouvement.

Les mouvements produits dans les systèmes qui réalisent ce genre de disposition sont généralement appelés *mouvements différentiels*, parce que la vitesse absolue est une combinaison de deux vitesses, et que ce n'est que par un mouvement de même nature que celui de l'organe que les guides peuvent continuer à agir et modifier la vitesse de celui-ci. Il résulte donc de semblables dispositions des moyens d'obtenir comme de nouveaux organes de transformation, bien qu'avec les éléments déjà connus, possédant d'autres rapports de vitesses, et l'étude de ces systèmes revient à la solution de ce problème, dont les transformations étudiées précédemment forment un cas particulier :

Déterminer le rapport de vitesse dans un organe de transformation lorsque le guide de l'organe est transporté par un mouvement de même nature que celui de cet organe, d'où résulte avance ou retard du mouvement, combinaison de vitesses.

Le problème ainsi nettement posé va nous permettre de réunir dans une même étude des systèmes dont l'analogie n'a jamais été clairement indiquée, pas plus que la nature nettement définie; qui permettent d'obtenir très-simplement certains mouvements qu'il serait impossible de produire par des combinaisons d'organes à guides fixes; qui enfin fournissent la solution du problème de faire des sommes ou des différences des vitesses transmises par d'autres organes de machines.

Passons en revue les diverses transformations du mouvement et les organes qui servent à les produire, c'est-à-dire les plans inclinés ou courroies, les roues ou tours et les leviers.

I. MOUVEMENT RECTILIGNE EN MOUVEMENT RECTILIGNE.

582. *Plans inclinés.* — Nous avons vu (art. 359) comment à l'aide de deux plans inclinés on pouvait transmettre le mouvement rectiligne de la barre AB à la barre CD. Pour cela le plan incliné P étant fixé à la barre AB (fig. 463), le plan incliné P′,

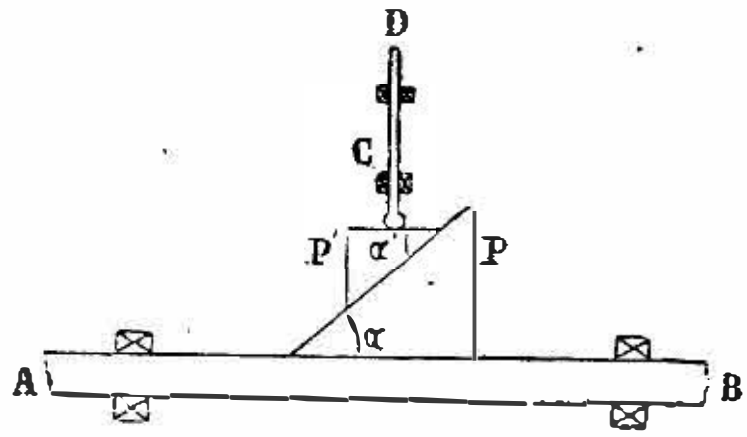


Fig. 463.

qui repose sur le premier, est assujetti à ne pouvoir que s'élever dans la direction de CD, et n'est qu'un moyen d'agir convenablement sur l'extrémité de la barre CD. Mais si on lui donne la faculté de se mouvoir aussi en même temps dans la direction AB, le mouvement de CD sera la somme ou la différence des deux mouvements rectilignes produits dans sa direction par les deux plans inclinés, suivant qu'ils s'avanceront l'un vers l'autre ou s'éloigneront l'un de l'autre. Si v est la vitesse du premier dans la direction AB, v tang. α sera la vitesse qu'il produira suivant CD en avançant suivant AB, α étant l'angle du plan incliné avec AB; de même α' étant l'angle du second plan incliné, v' sa vitesse, on aura pour sa vitesse v' tang. α' et pour résultante totale:

$$V = v \text{ tang. } \alpha \pm v' \text{ tang. } \alpha'.$$

583. *Poulies mobiles.* — La poulie mobile, dont le mouvement jouit de propriétés si évidentes à priori, qu'on peut faire reposer sur elles, à l'exemple de Lagrange, tout l'édifice de la théorie de la mécanique analytique, est essentiellement un organe différentiel. Le mouvement rectiligne de l'axe de rotation de la poulie vient s'y ajouter au mouvement semblable de la corde qui porte la poulie. En effet, dans la poulie mobile, l'une des extrémités

de la corde est fixée en un point A (fig. 464), la poulie repose sur la corde, et à sa chape est suspendue d'ordinaire un poids qu'il s'agit d'élever, et attachée la résistance qu'il s'agit de surmonter. Dans le cas de la figure 464, où les cordons aA, bB sont parallèles, et c'est le plus fréquent, on voit que si l'extrémité B s'élève de la quantité BBe le point C, où le poids est suspendu, s'élèvera aussi verticalement d'une certaine quantité CC′.

Fig. 464.

Or, quand le point B sera parvenu en B′, la portion de la corde soutenant la poulie, comprise entre le point A et le point B fixe dans l'espace, se sera raccourcie de la quantité BB′, mais ce raccourcissement se répartissant également sur les deux cordons parallèles aA et bB, chacun d'eux ne se sera raccourci que de la moitié de BB′, et la poulie, par suite le point C, se seront élevés verticalement d'une quantité égale à cette moitié. Ainsi $CC' = \frac{1}{2} BB'$, et la vitesse de l'axe de rotation sera moitié de celle du point B, puisque dans le même temps il aura parcouru une espace moitié moindre.

584. Le plus souvent la poulie mobile est supportée par deux brins parallèles ; cependant dans une assez grande nombre d'ap-

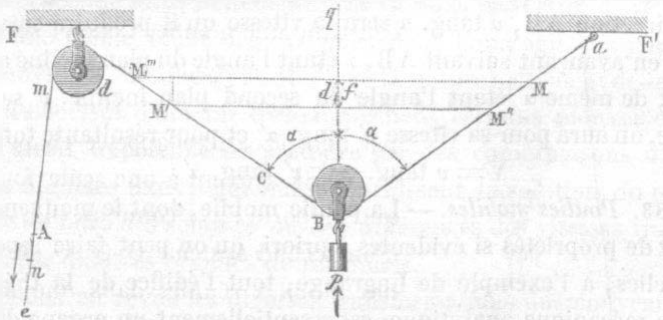


Fig. 465.

plications ils font un angle 2α. Le point B se meut alors suivant la droite qui divise en deux parties égales l'angle d'écarte-

ment des brins aB, cd, et l'angle 2α varie d'une manière continue pendant le mouvement de la poulie B.

Pendant que le point B parcourt un chemin df sur la bi-sectrice pq dans le temps dt, le point extrême A a dû parcourir un chemin de égal à la somme des deux longueurs MM'' et $M'M'''$; or MM''' et $\cos.\alpha = df$,

donc
$$de = 2\frac{df}{\cos.\alpha},$$

or,
$$V_1 = \frac{de}{dt}, V_2 = \frac{df}{dt}, \text{ donc } \frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{\cos.\alpha}.$$

Fig. 466.

L'angle initial α sera d'autant plus petit, pour un même écartement des points fixes, que la corde sera plus longue. Pour une longueur infinie $\alpha = 0$, $\cos.\alpha = 1$, $V_2 = \frac{1}{2}V_1$. Au contraire, le point B s'élevant, l'angle α augmente; à la limite $\alpha = 90°$, $\cos.\alpha = 0$, $V_2 = 0$. Si donc la vitesse V_1 est constante, le point B s'élèvera d'un mouvement retardé.

585. *Moufles.* — On obtient un rapport quelconque de vitesse par la répétition d'éléments semblables, ce qui constitue une moufle. Celle-ci se compose d'un système de poulies fixes $PP'P''$, dont les axes sont supportés par une pièce fixe appelée chape, qui se réduit souvent à une seule fourche qui supporte l'axe commune (fig. 466); d'un second système Q, Q', Q'' de poulies mobiles réunies dans une même chape mobile, à laquelle est suspendue la résistance à vaincre qui est habituellement un poids à soulever, et qui pourrait être une résistance quelconque

La corde, fixée par une de ses extrémités à la chape fixe en P passe alternativement sur une poulie de chaque système dans l'ordre PQ, P′, Q″, P′″.

Lorsque l'extrémité A de la corde s'abaisse verticalement de la quantité AA′, le point B où le poids est suspendu s'élève de la quantité BB′, qui est égale au quotient de AA′ par le nombre des cordons. En effet, quand le point A sera parvenu en A′, la portion de la corde comprise entre le point d'attache et le point géométrique A fixe dans l'espace, se sera raccourcie de la quantité AA′; mais ce raccourcissement étant réparti également sur tous les cordons à cause de la symétrie de la figure, le mouvement d'un point de l'axe mobile sera égal au quotient de AA′ par leur nombre de brins passant autour de poulies mobiles, la chape mobile et par suite le point B se seront donc élevés d'une quantité égale à ce quotient. Donc n étant le nombre des cordons, on a $BB' = \frac{AA'}{n}$. La vitesse du point B est donc n fois moindre que celle du point A, puisque dans le même temps il parcourt un espace n fois moindre.

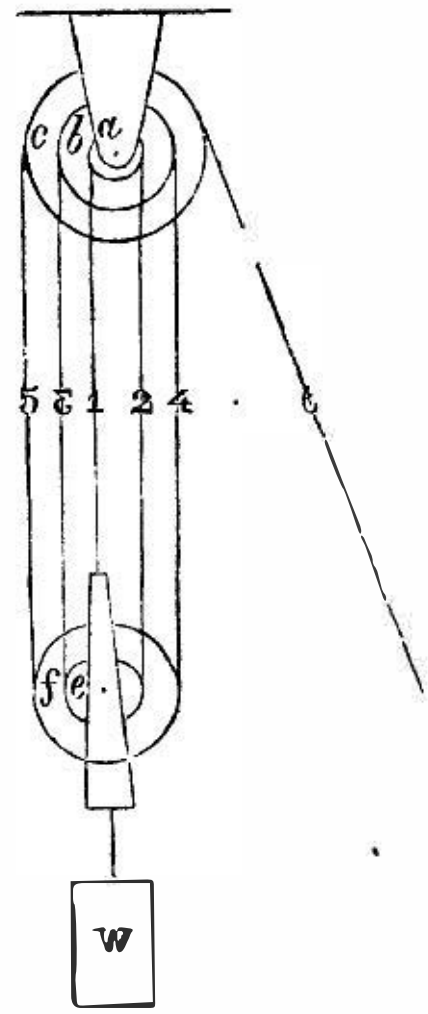


Fig. 467.

Donc enfin, avec un système de poulies, on peut toujours transformer un mouvement rectiligne donné en un autre dont la vitesse est dans un rapport quelconque avec celle du premier. Disons toutefois que les résistances dues à la roideur des cordes rendent ce système peu avantageux dans la pratique.

586. White a inventé un système de moufle particulier, dans lequel toutes les poulies supportées par les chapes tournent autour d'un seul axe avec lequel elles font corps. Dans la disposition de la figure 467, les cordons 1 et 2, 3 et 4, 5 et 6 se meuvent avec la

même vitesse, mais dans des directions opposées; 1, 3 et 5 en montant, 2, 4, 6 en descendant, en supposant que le poids W se meuve de bas en haut et *vice versâ*. D'ailleurs les vitesses de chacune des paires de cordons passant sur des poulies du rayon croissant sont différentes : la vitesse de 1 est égale à celle de la résistance W; 3, extrémité du brin 1, 2, 3, forme avec les deux autres une moufle dans laquelle $n = 3$, et par suite la vitesse de ce brin est triple de celle de W. Semblablement, les cordons de 1 à 5 forment une moufle dans laquelle $n = 5$, et ainsi de suite. Les vitesses des brins en partant du centre sont donc en progression arithmétique 1, 2, 3.... en supposant que la vitesse de W soit l'unité ; et si l'extrémité de la corde est fixée à la chape fixe, par conséquent si le nombre des poulies mobiles est le même que celui des poulies fixes, les vitesses des brins formeraient la série 0, 2, 4, 6.

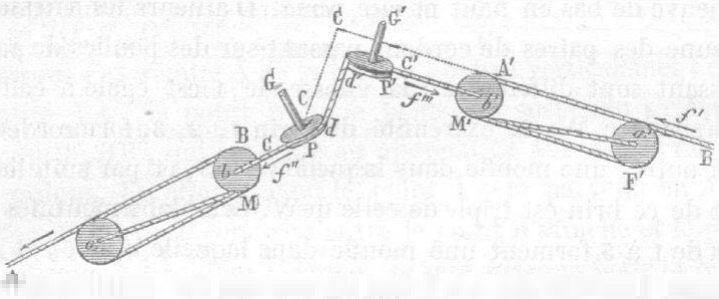
Puisque les brins successifs se meuvent avec une vitesse croissant en progression arithmétique, si l'on détermine les rayons des poulies a, b, c... suivant la même progression, toutes les poulies auront la même vitesse angulaire, et par suite pourront être faites d'une seule pièce. Ce système est donc en apparence assez simple; cependant il n'a pas été adopté dans la pratique, tant parce qu'il est d'une exécution difficile, que parce qu'il ne peut servir que pour des cordes d'un diamètre déterminé, le demi-diamètre de ces cordes devant être compris dans les rayons des poulies formant une progression.

587. Au moyen de poulies et de mouffles, on peut toujours transformer un mouvement rectiligne donné en un autre mouvement rectiligne donné, quelles que soient les directions et les vitesses de ces deux mouvements.

Soient BA, B′A′ les directions des deux mouvements, directions qui ne sont pas supposées dans un même plan. Admettons, pour fixer les idées, que les vitesses doivent être dans le rapport de 5 à 3.

Tangentiellement à BA, disposons une moufle FM, dont les axes a, b soient parallèles à la plus courte distance CC des deux

droites BA, B′A′, qui soit composée de 5 poulies, et sur lesquelles passe une corde attachée en *a*.



Disposons de même, tangentiellement à B′A′, une moufle F′M′, dont les axes soient parallèles aux premiers, qui contienne 3 poulies, et sur laquelle passe une corde attachée en *a′*. Soient ensuite P, P′ deux poulies fixes, tellement établies qu'un cordon *b c d d′ c′ b′*, dont les extrémités sont attachées en *b*, *b′* aux deux chapes mobiles des moufles, et qui passe sur P et P′, soit parallèle à AB dans sa partie *b c*, parallèle à CC de *d* en *d′*, et enfin parallèle à A′B′ dans sa partie *c′ b′* ; il suffit pour cela que les gorges des deux poulies soient respectivement tangentes à *bc*, *b′c′*, et que leurs axes G, G′ soient perpendiculaires l'un à AB et CC, l'autre à CC et A′B′. Il est facile de voir que cette disposition atteindra le but proposé. En effet, si l'on fait exercer une traction sur l'extrémité libre A de la corde A B *a*, l'axe *b* sera entraîné dans le même sens; par suite, les deux parties *b c*, *a′b′* du cordon *b c d d′ c′ b′* se déplaceront parallèlement aux directions f'', f''' ; et enfin l'extrémité B′ de la corde B′ A′ *a′* se mouvra dans le sens indiqué par la flèche f'.

D'un autre côté, si l'axe *b* de la moufle M se déplace d'une quantité *h*, le point A parcourra un espace égal à 10 *h*, et le point B′ décrira dans le même temps un chemin égal à 6 *h* : les vitesses des points A, B′ seront donc dans le rapport de 10 à 6, ou dans le rapport de 5 à 3.

588. *Combinaison de moufles.*—Soit A la poulie fixe d'une moufle qui a n_1 brins, et dont la corde se dirige suivant A B (fig. 469).

Plaçons à l'extrémité de cette corde une poulie mobile B et une moufle dont b est la poulie fixe, portant n_2 brins. Ayons de même une troisième moufle dont C soit la poulie mobile et c la poulie fixe, ayant n_3 brins.

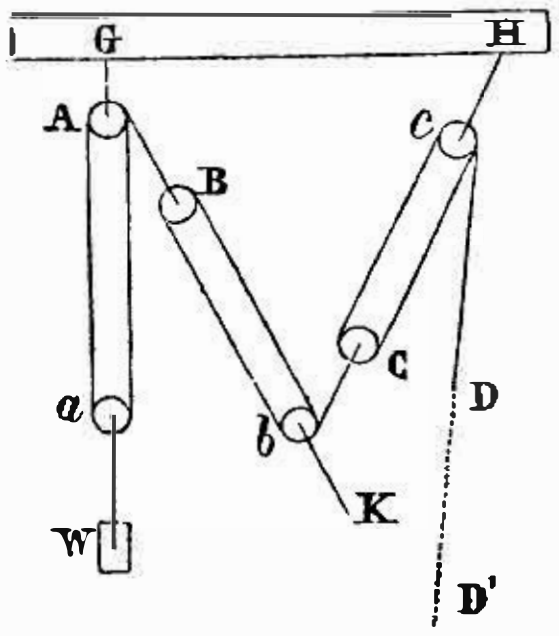


Fig. 469.

Soient V_4 la vitesse de la corde sortant suivant CD, et V_1 V_2 V_3 les vitesses respectives de a, B, C, on a :

$$V_4 = n_3 V_3 = n_3 n_2 V_2 = n_3 n_2 n_1 V_1.$$

S'il y a m moufles dans le système et que tous aient le même nombre de brins, on aura :

$$V_{m+1} = n^m V_1.$$

Le nombre total des brins sera $n \times m$; d'où le problème suivant analogue à celui traité dans la note de la page 481.

589. Étant donné le rapport des vitesses $\frac{V_{m+1}}{V_1} = n^m$ d'un système de moufles, trouver le nombre et la nature des moufles qui exigent le moindre nombre de brins pour un même rapport de vitesse, problème intéressant puisqu'il donnera le système dans lequel la résistance due à la roideur des cordes sera la moindre, résistance considérable dans les moufles.

Puisque $n^m =$ constante $= C$, on a :

$$m = \frac{\log. C}{\log. n}, \text{ et le nombre } n \times m = \frac{n \log. C}{\log. n},$$

dont le minimum est obtenu pour log. hyp. $n = 1$ ou $n = 2{,}72$, dont le nombre entier le plus approché est 3; ce qui donne la série de moufles qui peuvent transmettre une vitesse dans un rapport donné avec le moindre nombre de brins, et par suite de résistances passives par la combinaison de moufles simples et égales. Les marins emploient quelquefois les moufles de cette manière.

Si au lieu d'attacher chaque moufle au brin sortant de la poulie fixe de la moufle précédente, on l'attachait au brin sortant de la poulie mobile, un brin pourrait encore être épargné

dans chaque moufle, et le nombre total des brins serait $(n-1)m$, dont le minimum serait toujours pour $n-1=2,72$ d'où $n=3,72$.

590. *Résistances passives des moufles.* — Les curieuses propriétés des moufles comme vitesse, qui se traduisent en effets dynamiques correspondants, en expliquent le fréquent emploi dans les constructions et la marine. Ils constituent un des moyens les plus précieux d'appliquer les efforts de plusieurs personnes à surmonter une résistance qui peut être très-considérable avec des dimensions de cordes assez limitées. Le seul inconvénient, et malheureusement fort grave de cet appareil, c'est que les résistances passives, la consommation du travail par les résistances à l'enroulement de la corde sur chaque poulie est très-considérable. Ce n'est guère que dans la marine où l'élasticité des cordes est si bien en rapport avec l'élasticité générale des mâts et des vergues, que les moufles sont restées d'un emploi de chaque instant; presque toutes les poulies qui tendent les mille cordages d'un navire à voiles sont mouflées.

591. *Combinaison avec la bielle.* — Lorsqu'un des mouvements rectilignes est alternatif, la combinaison de vitesse que fournit la poulie mobile pourra servir à obtenir des mouvements complexes avec une grande simplicité. Par exemple, soit à faire mouvoir une pièce d'un mouvement rectiligne alternatif tel que le mouvement en avant soit toujours plus grand que celui en arrière, de telle sorte qu'elle avance ainsi graduellement d'une extrémité à l'autre d'une ligne droite. Ce mouvement sera évidemment obtenu avec la plus grande simplicité par l'addition des vitesses de deux systèmes, l'un possédant un mouvement rectiligne alternatif, l'autre un mouvement rectiligne continu.

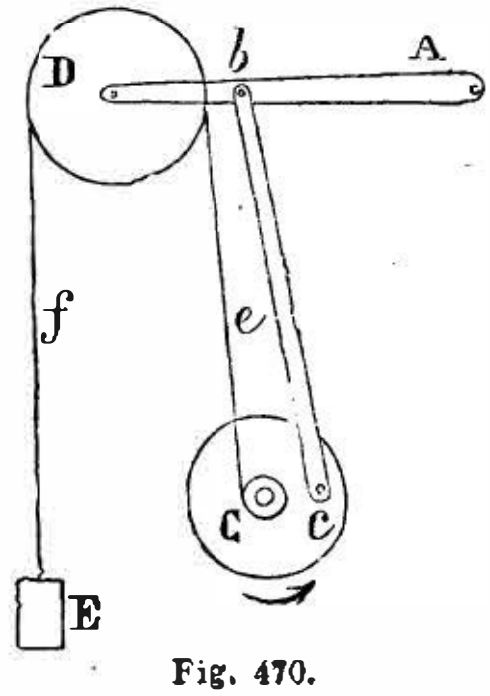


Fig. 470.

Réalisons en partie une pareille disposition. Soit C (fig. 470), un axe

de rotation auquel est adapté un petit cylindre autour duquel la corde *e* s'enroule, et qui porte en outre un disque sur lequel est fixé excentriquement une cheville *c* qui, par le moyen de la bielle *cb*, communique un mouvement alternatif au levier A*a* dont le centre est en A. L'extrémité du levier porte une poulie D, et la corde qui s'enroule autour du petit cylindre passe sur cette poulie et va se réunir à un poids ou une pièce E assujettie à se mouvoir suivant E*f*.

Quand C tourne, le centre de la poulie D oscille et décrit un petit arc qui se confond sensiblement avec une parallèle à *f*E, et en vertu de ce mouvement de l'axe de la poulie mobile, le brin et le poids E reçoivent un mouvement alternatif d'étendue double de celui de l'axe de la poulie (le brin *e* ne pouvant y participer). Simultanément le brin *e*, qui s'enroule lentement sur le cylindre, communique à E un mouvement continu de bas en haut. Par suite E recevant en même temps ces deux mouvements qui s'ajoutent dans un sens et se retranchent dans l'autre, se meut verticalement d'un mouvement alternatif de moindre étendue en descendant qu'en montant.

II. MOUVEMENT CIRCULAIRE EN MOUVEMENT RECTILIGNE.

Les organes qui servent à cette transformation peuvent fournir deux systèmes différentiels, suivant qu'on considère le mouvement circulaire ou le rectiligne, et qu'on laisse prendre au guide de l'un des éléments de la transformation le mouvement de l'autre.

GUIDES A MOUVEMENT RECTILIGNE.

592. Le moyen d'astreindre l'axe du mouvement circulaire à se mouvoir en ligne droite consiste à le rendre solidaire d'une pièce glissant dans des guides rectilignes, de faire par exemple porter les coussinets par une pièce qui glisse sur une barre rectangulaire. Cette combinaison d'un mouvement rectiligne et d'un mouvement circulaire fournit un instrument simple propre à tracer la cycloïde, un point du cercle étant muni d'un traçoir,

et son axe porté par un petit bâti supporté par une règle qui glisse en pressant une règle fixe.

Si la roue dont l'axe est ainsi mis en mouvement est munie de dents qui engrènent avec une crémaillère (fig. 471) dont la direction est parallèle à la ligne que décrit le centre de la roue, on aura un mouvement différentiel, et le mouvement C de la crémaillère, pour un tour de la roue et un déplacement l de son axe, sera :

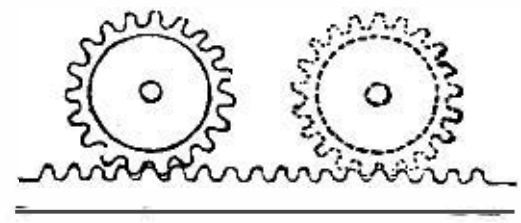


Fig. 471.

$$C = 2\pi r \pm l.$$

593. *Vis différentielle.*—Si l'axe de la roue est à angle droit avec la direction du mouvement rectiligne, la vis fournira un système différentiel, si on fait prendre un mouvement rectiligne parallèle à l'axe aux collets de la vis que l'on suppose fixes dans la disposition ordinaire. Le moyen le plus naturel d'obtenir ce résultat consiste à fileter les collets de la vis et à transformer en écrou les coussinets qui les reçoivent, ce qui fournit le système inventé par M. Prony, et auquel il a donné le nom de vis différentielle (fig. 472). Il consiste dans un arbre portant deux pas de vis vers ses extrémités; ceux-ci traversentdeux supports formant écrous fixés, et par suite l'axe avance d'un pas par chaque tour de manivelle. Le milieu de l'axe est formé d'une vis d'un pas différent du précédent, et porte un écrou qu'un guide rectiligne empêche de tourner. Celui-ci avancerait, si la vis était fixée dans des collets par chaque tour d'une quantité égale au pas de sa vis; son mouvement absolu, égal au transport de l'axe moins son mouvement propre, sera donc égal à la différence des deux pas de vis $(h - h')$, quantité qu'on peut obtenir aussi petite qu'on le voudra, en conservant aux deux filets de la vis toute la solidité nécessaire.

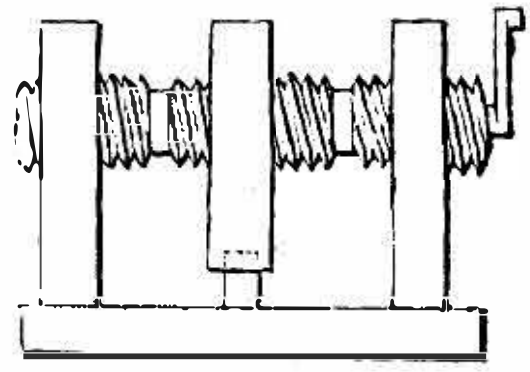


Fig. 472.

Si les inclinaisons des deux filets au lieu d'être de même sens

étaient de sens contraire, les mouvements au lieu de se retrancher l'un de l'autre s'ajouteraient.

594. *Treuil différentiel.* — On appelle ainsi un treuil tel que le mouvement rectiligne de la résistance à surmonter s'y trouve la différence de deux mouvements rectilignes.

Considérons un treuil employé à soulever un fardeau, la corde est guidée en ligne droite par la pesanteur lors de son enroulement autour du cylindre. Si le poids est suspendu à une poulie mobile soutenue par une corde pliée en deux parties, dont les extrémités s'enroulent dans deux sens opposés sur le cylindre du treuil (fig. 473), et que ce cylindre soit formé de deux cylindres de diamètres différents, on aura le treuil différentiel, la différence des longueurs enroulées pour un tour produisant absolument le même effet que la différence des pas de vis dans la vis différentielle. Le fardeau n'est plus alors soulevé pour chaque tour que de la moitié de la différence des deux chemins parcourus par la corde sur les deux cylindres, et on a par tour

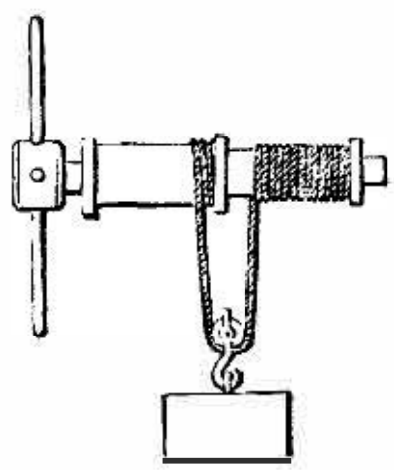


Fig 473.

$$c = 2\pi\left(\frac{R - r}{2}\right) = \pi(R - r).$$

595. Malgré ses avantages apparents, ce système n'est pas employé dans la pratique, parce que la résistance passive qui existe dans le treuil par l'effet de la roideur des cordes y est considérablement augmentée.

En effet, pour chaque tour du treuil différentiel, la longueur de la corde enroulée (tant pendant ce tour qu'antérieurement pour qu'il puisse fonctionner) est $2\pi R + 2\pi r$. Le fardeau est est élevé pour ce tour de $2\pi\dfrac{R - r}{2} = \pi(R - r)$, quantité égale à la longueur de corde qui serait enroulée sur un treuil ordinaire pour une même élévation du fardeau. Donc on a :

$$\frac{\text{Longueur de corde sur le treuil différentiel}}{\text{Longueur de corde sur le treuil ordinaire}} = \frac{2R + r}{R - r},$$

R — r étant très-petit par hypothèse, ce rapport est donc très-grand, et le travail consommé par suite de la roideur de la corde beaucoup plus considérable que dans le treuil ordinaire.

GUIDES A MOUVEMENT CIRCULAIRE.

596. Considérons maintenant le cas où l'on donne un mouvement circulaire à la pièce mue d'un mouvement rectiligne.

Soit d'abord le cas des deux mouvements accomplis dans un même plan, par exemple, d'une crémaillère. Si on fait tourner celle-ci autour de l'axe de rotation de la roue en montant ses guides sur un disque tournant autour de cet axe, on voit :

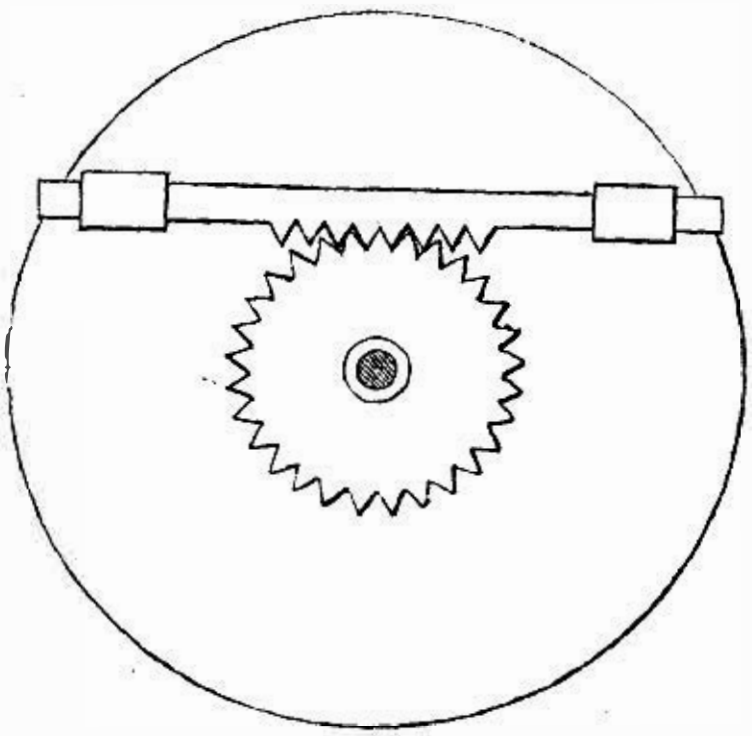


Fig. 474.

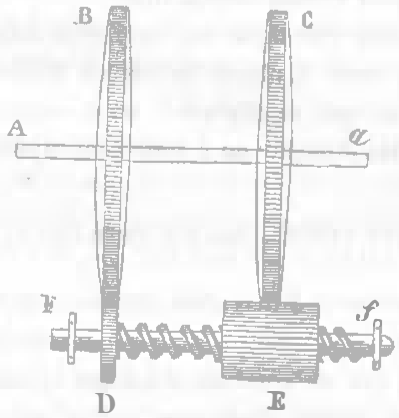
1° Que si le disque a la même vitesse angulaire que la roue, la crémaillère n'aura qu'un mouvement de rotation;

2° Que si cette vitesse angulaire est différente, la crémaillère aura en même temps un mouvement de rotation et un de progression, ce dernier étant pour deux angles ω, ω' parcourus en un même temps $r(\omega' - \omega)$. Si $\omega' = 2\omega$, rapport bien facile à établir par deux engrenages moteurs, cette progression sera $r\omega$, et, en roulant sur la circonférence, la crémaillère tracera par un de ses points les développantes du cercle primitif; dans tous les cas, des développantes allongées ou raccourcies.

597. Soit maintenant le cas de deux mouvements à angle droit, celui de la vis, et supposons que l'écrou ait la liberté de

tournerautourdu mêmedaxedquedla vis. Cetteddisposition permettrad'obtenir undmouvementdifférentieldrectiligne ded'écrou en montant sur l'axe moteur deux roues qui engrènent, l'une avec unedrouemontée sur la tête de la vis,d'autre avec ledcontourdextérieurded'écroudformantdpignon.

A *a* est l'axe moteur(fig. 475) surdlequel sontdmontéesdles



deux roues B et C, F *f* est l'axe de la visdournantsur deux collets; vers satête est montée une roue D, et elle porte un pignon E dont l'intérieur est taillé en écrou, qui peut par suite avancer ou reculer en tournant autour de la vis.

Si les roues B, C, D, E étaientégales deux à deux, ildest clair qued'écrou etdavis tourneraientdensembledcommeds'ilsne faisaient qu'une seule pièce; mais si les rayons sont différents, il en résulte un mouvement relatif, un mouvement différentiel dontdlavitessedrésulte dedladdifférenceddesdvitessesddesdmouvementsdcomposants.

En effet, représentons par B, C, D, E, les nombres de dents desrouesdreprésentées par lesdmêmes lettres, et par P le pas de la vis. Les rotations simultanéesdes axes A *a*, F *f* et de l'axe ded'écroudétant L,dL$_c$, L$_e$, on a :

$$L_c = \frac{L\,C}{E}, \quad L_c - L = \frac{L\,B}{D}.$$

Mais si la vis fait L_v rotations et l'écrou L_e dans le même sens, l'écrou se meut sur la vis, d'une quantité $L_v - L_e$ et on a pour la valeur de ce déplacement de l'écrou parallèlement à l'axe de la vis :

$$(L_v - L_e)\,P = L\,P\left(\frac{B}{D} - \frac{C}{E}\right),$$

quantité qu'on peut rendre très-petite.

Une combinaison analogue est employée dans quelques alésoirs (soit qu'on fasse déplacer la vis en guidant l'écrou, soit que ce soit l'écrou qui se déplace); nous verrons plus loin une application que M. Poncelet en a faite à un dynamomètre.

III. MOUVEMENT CIRCULAIRE EN MOUVEMENT CIRCULAIRE.

598. Le mouvement différentiel existera dans un système de roues ou de pièces douées d'un mouvement de rotation, lorsque l'on donnera à l'axe de rotation d'un des systèmes un mouvement de rotation autour de l'autre axe. C'est ce cas que nous allons traiter avec détail, car il offre des résultats remarquables.

Disons d'abord qu'il est un cas particulier où l'on peut produire un mouvement différentiel en donnant à l'un des axes de rotation un mouvement rectiligne. C'est lorsque les axes sont à angle droit, lorsqu'on emploie la vis sans fin.

Lorsqu'on considère une section de ce système par un plan passant par l'axe de la vis, perpendiculairement à l'axe de la roue, il est semblable à celui composé (fig. 476) d'une roue et d'une crémaillère.

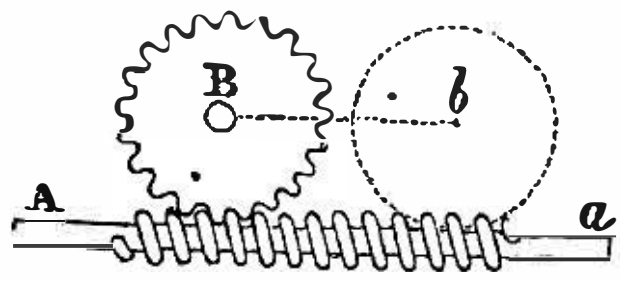


Fig. 476.

Lors donc qu'on fait glisser la vis dans le sens de la longueur

de l'axe sans rotation, elle agit comme une crémaillère. D'autre part, en tournant, elle communique une rotation à la roue. Donc, quand ces deux mouvements seront communiqués par un double mouvement de la vis (ou inversement si la roue se transporte parallèlement à l'axe de la vis pendant que celle-ci tourne), on aura un mouvement différentiel. Par exemple, si la vis a en même temps un mouvement de rotation uniforme et un petit mouvement de va-et-vient, la roue se mouvra en faisant continuellement un certain mouvement dans un sens et un moindre dans l'autre.

599. Revenons au cas général.

Le système qui résulte de la disposition convenable pour le mouvement différentiel, fournit une application curieuse de l'emploi que nous avons déjà fait du système de mouvements combinés pour tracer des courbes.

Lorsqu'une circonférence roule sur une autre, nous avons vu qu'un de ses points décrit une épicycloïde sur un plan fixe, or le fait d'assembler l'axe d'une roue dentée (pour prendre le cas le plus commun, car pour des poulies conduites par courroies, des rouleaux se menant par contact, etc., tous les résultats que nous allons obtenir seraient les mêmes) réalise précisément l'entraînement de cette roue pendant qu'elle roule autour d'un autre roue, et par conséquent donne le moyen de tracer les épicycloïdes. Nous savons d'ailleurs que tout système de roues parallèles donnant des rotations dans un rapport de vitesse quelconque, pouvant toujours être remplacé par le roulement de deux circonférences primitives de rayons obtenus en divisant la distance des centres en raison inverse de ces vitesses, cette disposition ne pourra donner que des épicycloïdes. Tel est le petit appareil dit plume géométrique de Suardi, que décrivent MM. Lantz et Bétancourt.

600. A un axe D (fig. 477), monté sur trois pieds qui supportent l'instrument, est fixée à demeure une roue *i*; ce même axe porte une barre G pouvant tourner autour de lui, et portant deux roues dentées *b*, *c*, qui engrènent entre elles et avec la première *i*. Il

est évident que si on fait mouvoir la barre G autour de l'axe D, la roue *c* tournera comme si elle roulait sur une circonférence. Un crayon assemblé avec un point de la roue *c* pourra servir à tracer une épicycloïde; si on adapte ce crayon à l'extrémité d'une barre *fk*, la courbe tracée sera une épicy-

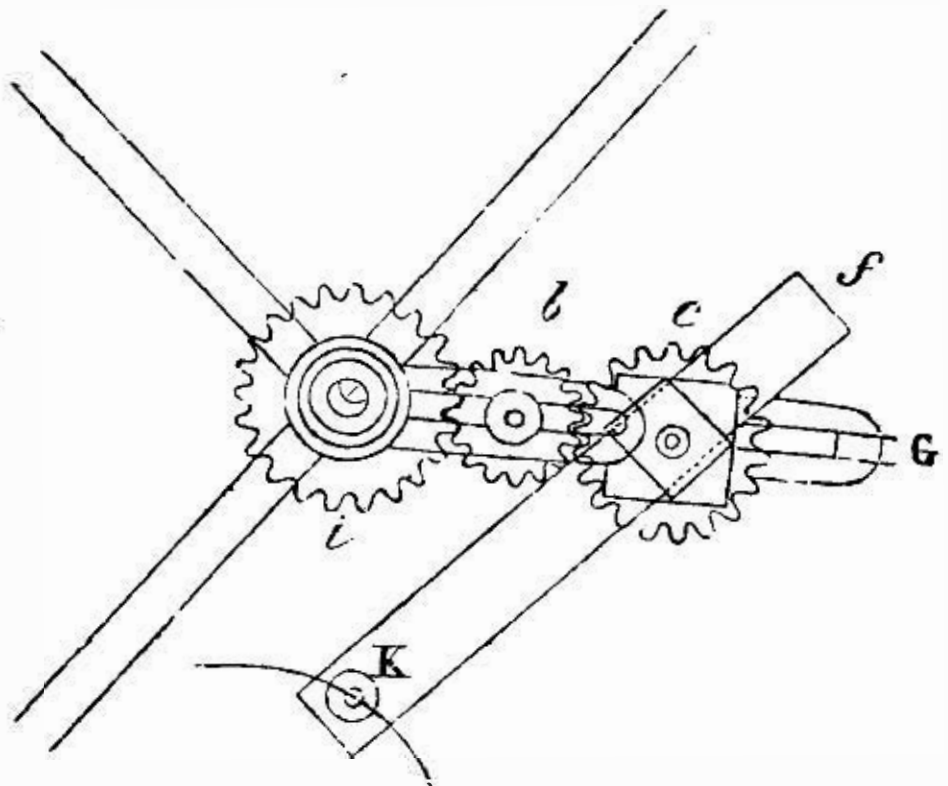


Fig. 477.

cloïde allongée, dont la forme variera en raison des diamètres des roues dentées, mais ne pourra cesser d'être de la famille des épicycloïdes.

Malgré la variété des courbes qu'il est possible d'obtenir ainsi, la rotation d'un cercle sur un autre en établissant entre les coordonnées d'un point décrivant certaines relations d'une nature particulière, qui, traduites en équation, donnent l'équation de l'épicycloïde, ne peut servir, par suite, qu'à tracer la famille des courbes représentées par une équation de même forme, et nullement celles où les relations entre les coordonnées sont d'une nature tout à fait différente.

Nous reviendrons sur les principaux résultats que fournit ce tracé après avoir étudié la question des vitesses; nous ne parlerons ici que du cas particulier où, comme nous l'avons déjà vu, l'épicycloïde décrite devient une ligne droite, lorsque la roue

décrivante est d'un diamètre moitié de celui de la roue fixe, sur laquelle elle roule intérieurement.

De là résulte une solution particulière de la transformation du mouvement circulaire continu en rectiligne alternatif, à l'aide des engrenages circulaires, un moyen de produire par ce mouvement différentiel de la petite roue une double oscillation de va-et-vient pour un tour de roue. Ce *système, dû à Lahire* (fig. 478), consiste à faire mouvoir, dans une grande roue dentée intérieurement, une petite roue dentée d'un diamètre égal à la moitié de celui de la première. Chacun des points de la circonférence de la petite roue décrit un diamètre de la première et peut, par suite, imprimer un mouvement de va-et-vient à une tige qui y est fixée.

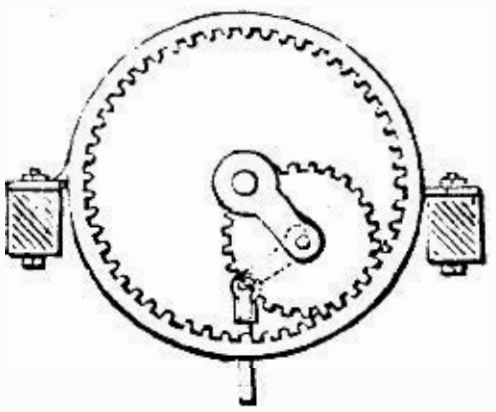


Fig. 478.

Le triangle A B C étant isocèle, on a : $AC = 2r \cos. BAC$ (A étant le centre de la grande roue, C étant le point d'attache d'une tige qui se meut verticalement, et B le centre de la petite roue dont le rayon est r), le rapport de la vitesse de rotation à celle du mouvement rectiligne est donc le même que pour une bielle infinie et une manivelle ordinaire dont le rayon est égal à 2 A B (1).

(1) En effet, appelons ω la vitesse angulaire du rayon AB, t le temps nécessaire pour parcourir l'angle BAC, nous poserons $\cos. BAC = \cos. \omega t$. La vitesse du point C sera donc (en différentiant par rapport à t l'expression ci-dessus) :

$$v = -2r\omega \sin. \omega t = -2r\omega \sin. \alpha.$$

Or, la vitesse V du centre B est, par hypothèse constante, égale à $r\omega$, donc

$$\frac{V}{v} = \frac{1}{2 \sin. \alpha}.$$

Or, nous avons trouvé l'expression $\frac{1}{\sin. \theta}$ pour le rapport de la vitesse rectiligne de l'extrémité de la bielle à celle circulaire de la manivelle, ou $\frac{V}{v} = \frac{1}{\sin. \theta}$; et si on remplace le rayon de la manivelle par un rayon double,

DES DIVERSES DISPOSITIONS D'ENGRENAGES DIFFÉRENTIELS.

601. Nous appellerons rouages ou trains épicycloïdaux les systèmes dérivant du mouvement de rotation de l'axe d'une roue dentée autour de l'axe fixe d'une autre roue dentée avec lequel la première engrène; c'est la seule nature de mouvement qui puisse exister pour que l'engrènement des roues continue.

Il y a dans un système épicycloïdal trois parties essentielles à considérer : les deux roues extrêmes, et le rayon concentrique à l'une d'elles qui porte l'axe de l'autre. Les relations de position différentes de ces trois éléments donnent lieu aux systèmes représentés dans les figures suivantes :

1° Les roues sont extérieures, le plus souvent l'axe de la première A (fig. 479) étant fixe, le mouvement est imprimé à l'autre roue extrême B et au rayon.

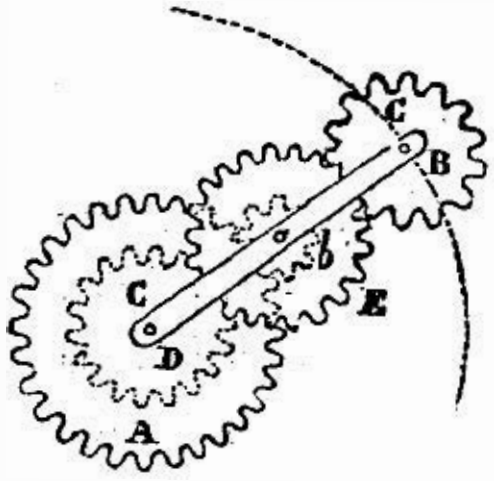


Fig. 479.

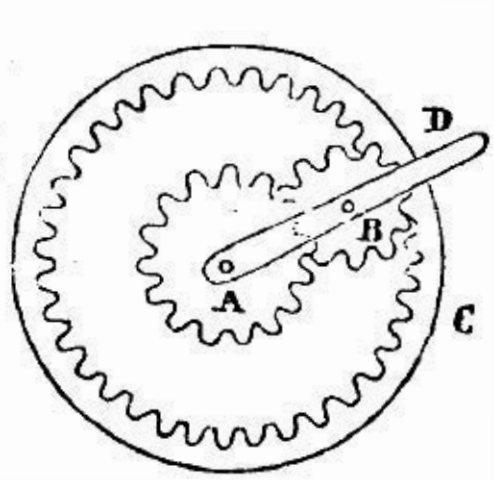


Fig. 480.

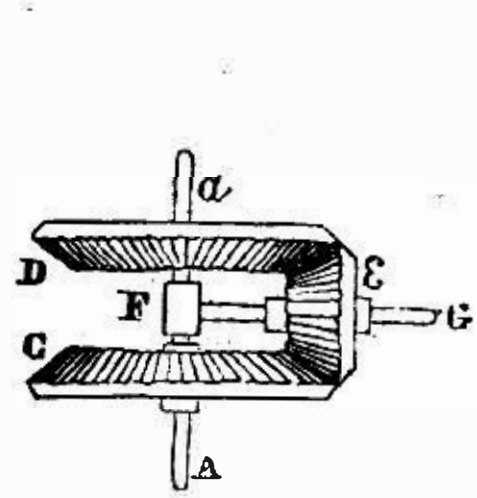


Fig. 481.

2° L'une des roues est intérieure à l'autre, généralement l'axe

la vitesse angulaire restant la même, l'angle θ ne variera pas, et on aura $\frac{2V}{v} = \frac{1}{\sin.\ \theta}$, ou précisément le résultat indiqué ci-dessus.

Le mouvement rectiligne de la tige attachée au point C du petit cercle est donc absolument le même que celui qui serait produit si elle était attachée à un point de la grande circonférence dont le rayon passant par ce point serait converti en bras de manivelle. L'absence de propriétés particulières au mouvement de cet organe, qui entraîne aux frottements notables des engrenages et nécessite un porte à faux peu admissible, explique pourquoi il tient peu de place dans les constructions récentes de la mécanique.

de la roue extrême (fig. 480) extérieure est fixe ; le mouvement est imprimé au rayon qui entraîne la roue mobile.

3° Enfin les deux roues ne sont plus situées dans un même plan, elles sont parallèles et montées sur un même axe; le mouvement de la roue D (fig. 481) montée sur l'arbre A*a* imprimera, par l'intermédiaire de la roue E supportée par le rayon, un mouvement à la roue C, qui tourne librement sur l'axe A*a*.

DÉTERMINATION DES RAPPORTS DE VITESSE DANS LES ROUAGES ÉPICYCLOÏDAUX.

602. Soit A B un rayon tournant autour de A (fig. 482) et conduisant un système dont la première roue est A concentrique au rayon et dont la dernière B peut être concentrique ou non concentrique avec A. Ces deux roues sont réunies par un nombre quelconque de roues dentées transportées par le rayon A B. Les révolutions d'un point de ces roues doivent être estimées : 1° par rapport à la position initiale du rayon, ce qui s'obtient en mesurant la distance angulaire d'un rayon passant par le point décrivant avec la ligne fixe A*f*, ou si cette roue est excentrique comme B, avec une ligne B*k* parallèle à A*f* ; 2° par rapport au rayon qui transporte les axes. Le premier arc mesure le transport, le second les révolutions relatives ou par rapport au rayon qui tourne autour de A. Le rayon transportant le système de la position A*f* à A B, et pendant ce même temps le point *m* de la roue A arrivant en *n* par une action extérieure, le point *r* de la roue B passe en *s* en vertu de la connexion de cette roue avec la roue A (nous supposons que ces mouvements ont lieu dans le même sens), *m*A*n*, *r*B*s* étant les mouvements absolus des points correspondants sur les roues A et B, et *p*A*n*, *t*B*s* sont leurs mouvements par rapport au rayon.

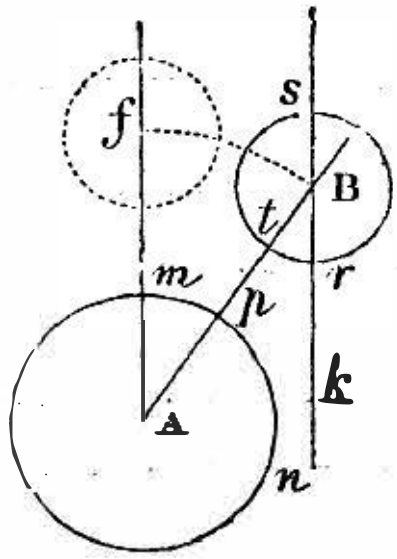


Fig. 482.

On a : $mAn = mAp + pAn$ et $rBs = rBt + tBs = mAp + tBs$, mAp étant le mouvement du rayon.

Si les roues se meuvent dans des directions opposées, on a :

$$mAn = pAn - mAp \text{ et } rBs = tBs - mAp,$$

relation qui subsiste, quelle que soit la grandeur des angles décrits, et est vraie toutes les fois que les rapports des vitesses angulaires sont constants, comme il arrive avec les roues dentées. Ce qui revient à dire que les révolutions absolues des roues d'un système épicycloïdal sont égales à la somme de leurs révolutions par rapport avec le levier, plus celles dece levierlui-même, quand les directions sont de même sens, et égales à la différence de ces deux quantités quand elles sont de sens contraire.

603. Soient a, m, n les révolutions absolues simultanées du rayon, de la première et de la dernière roue, et soit ε la raison du système épicycloïdal, c'est-à-dire le quotient du nombre des révolutions relatives de la dernière roue divisé par le nombre de celles de la première. ε est une quantité de la forme $\frac{T_m}{T_1}$, identique avec celle trouvée pour un système de roues dentées, car elle se rapporte aux mouvements estimés par rapport au rayon qui joint les centres.

Les révolutions relatives de la première roue par rapport au rayon $= m - a$ et celles de la seconde roue $= n - a$, les mouvements du train considérés par rapport à la barre portant les axes de rotation étant les mêmes que ceux d'un système ordinaire de roues dentées, on a :

$$n - a = \varepsilon(m - a) \text{ ou } \varepsilon = \frac{n - a}{m - a} \text{ d'où :}$$

$$a = \frac{m\varepsilon - n}{\varepsilon - 1} (1),\ n = a + (m - a)\varepsilon (2),\ m = a + \frac{n - a}{\varepsilon} (3).$$

Appliquons ces formules à divers cas simples :

1° Si la première roue du système est fixe, comme il arrive le plus souvent, le nombre m de ses révolutions absolues est 0, et on a :

$$a = \frac{n}{\varepsilon - 1} \text{ et } n = (1 - \varepsilon)a;$$

2° Si c'est la dernière roue qui est fixe $n = 0$, et on a :

$$a = \frac{m\,\varepsilon}{\varepsilon - 1} \text{ et } m = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) a.$$

3° Enfin quand aucune des roues n'est fixea

$$a = \frac{m\,\varepsilon - n}{\varepsilon - 1} = \frac{m\,\varepsilon}{\varepsilon - 1} + \frac{n}{1 - \varepsilon}\,[4],$$

c'est-à-dire que les révolutions du rayon sont égales à la somme des révolutions qu'il fait quand on suppose successivement fixes les roues extrêmes.

Dans ces formules, les rotations sont considérées comme étant toutes du même sens; s'il en est autrement, pour celle de sens opposé, le signe de m, n, ou a, doit être différent. Nous revenons plus loin sur ces signes.

604. Lorsque, pour la disposition de la fig. 481, ni la première ni la dernière roue n'étant fixes, le mouvement est communiqué par un même axe moteur, soit aux deux roues extrêmes, ce qui produit un mouvement complexe du rayon, soit à l'une des roues extrêmes et au rayon, d'où résulte le mouvement complexe de l'autre roue extrême, on peut évaluer les vitesses en fonction de celle de l'axe moteur.

La figure 483 est un exemple d'un système de ce genre ; mn est

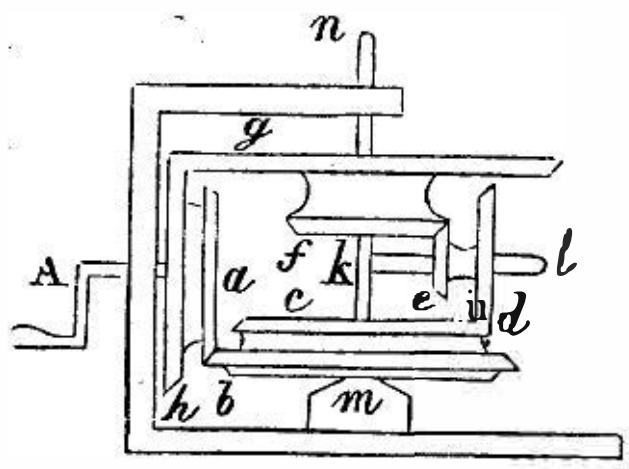


Fig. 483.

un axe qui porte le bras kl qui transporte les deux roues d et faisant un tout et tournant autour du même axe. Les roues b et c sont unies de même, et tournent autour de l'axe mn, mais ne font pas corps avec cet axe. Pareillement les roues f et g sont fixées ensemble et tournent autour de mn. Les roues c, d, e et f constituent un système épicycloïdal dans lequel c est la première roue et f la dernière.

Enfin l'axe A imprime le mouvement et porte deux roues a et h, la première engrenant avec la roue b et communiquant le mouvement à la première roue c du train épicycloïdal, la roue h engrenant avec la roue g qui donne le mouvement à la roue f qui est la dernière du train ; quand cet axe A tourne, il communique le mouvement aux deux extrémités du train épicycloïdal, et le rayon kl reçoit un mouvement combiné que nous allons calculer.

On pourrait encore supposer les roues g et f désunies, g étant fixé à l'axe mn et f tournant librement autour de lui. L'axe A communiquant le mouvement comme précédemment à la première roue c du système épicycloïdal par le moyen des roues a et b, comme d'ailleurs la roue h met en mouvement la roue g, l'axe mn et le rayon kl se meuvent en même temps, d'où résulte un mouvement composé de la roue libre f. Dans cette seconde combinaison, la dernière roue f n'est pas nécessairement concentrique avec le rayon kl.

605. Soit l'axe conducteur réuni avec la première roue du système épicycloïdal par un ensemble de roues dentées dont la raison soit μ, et avec la dernière par un système dont la raison soit ν, et soient p les rotations de cet axe moteur, celles simultanées des deux roues seront $m = \mu p$, $n = \nu p$, et la valeur (4) de a de la rotation du rayon est toujours, la disposition à angle droit ne changeant pas le nombre de dents qui passent au point de contact

$$\frac{a}{p} = \frac{\mu\varepsilon - \nu}{\varepsilon - 1} = \frac{\mu}{1 - \frac{1}{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1 - \varepsilon}.$$

La première partie de cette formule donne la vitesse due à l'action du train μ, la seconde à celle du train ν.

En effet, si l'on suppose le système de roues μ enlevé, alors la première roue du système épicycloïdal reste fixe et $m = \mu p = 0$, d'où

$$\frac{a}{p} = \frac{\nu}{1 - \varepsilon},$$

et de même si le système ν était enlevé :

$$\frac{a}{p} = \frac{\mu}{1 - \frac{1}{\varepsilon}},$$

c'est-à-dire que le rayon se meut avec la somme ou la différence des vitesses produites par chaque action lorsqu'elles deviennent simultanées.

606. *Second cas.*— L'axe menant étant réuni avec la première roue du système épicycloïdal par un ensemble de roues dont la raison est μ, et avec le rayon par un train dont la raison est α, $m = \mu p$ et $a = \alpha p$, la formule (2) donne pour la dernière roue :

$$n = \alpha p (1 - \varepsilon) + \mu p \varepsilon \text{ et } \frac{n}{p} = \alpha (1 - \varepsilon) + \mu \varepsilon.$$

Les révolutions de la dernière roue du train épicycloïdal sont la somme algébrique de celles dues aux roues dentées α qui produisent le mouvement du rayon, et de celles dues aux roues dentées μ qui produisent le mouvement de la première roue du système épicycloïdal.

607. Toute la difficulté dans l'application de ces formules consiste dans le choix du signe que l'on doit donner à la raison des trains.

Un sens de rotation étant pris comme positif, le sens opposé devra être considéré comme négatif, et par suite si les roues extrêmes tournent dans le même sens, toutes deux à droite ou toutes deux à gauche, le rapport est positif ; il est négatif s'ils sont de sens opposés. Les rotations du train μ, ν, sont *absolues*, et celles ε *relatives* au rayon. Pour déterminer le signe de ε il faut supposer un instant le rayon fixe, et par l'analyse du système, déterminer si les rotations des roues extrêmes sont de même sens ou de sens opposé.

On déterminera de même les signes de μ et ν en les considérant séparément : si les mouvements des roues sont de même sens, μ et ν ont le même signe, les signes seront différents si les mouvements sont de sens opposés. Dans les formules ci-dessus, les quantités sont supposées positives ; les signes resteront posi-

tifs dans tout cas particulier où les mouvements sont semblables à ceux des exemples qui ont donné ces formules, et négatifs pour ceux de sens contraires.

608. Soit, pour application des formules précédentes, les systèmes épicycloïdaux représentés dans les figures 479, 480 et 481, et supposons que les lettres qui désignent les roues représentent les nombres de dents.

Le système formé des roues A, B, C, dans la figure 480, est tel de sa nature que les roues A et C tournent en sens opposé, par suite ε est négatif; de même dans le système de la figure 481; mais dans celui de la figure 479, les roues extrêmes tournent dans le même sens, et par suite ε est positif. D'ailleurs, on a pour le système de la figure 479 :

$$\varepsilon = +\frac{AE}{bB}; \text{ dans la fig. 480, } \varepsilon = -\frac{A}{C}, \text{ et fig. 481, } \varepsilon = -\frac{C}{D} = -1.$$

Lorsque la première roue des trains est fixe, c'est-à-dire lorsque $m = 0$, on a, d'après la formule (2) :

pour le système fig. 479, $n = \left(1 - \frac{AE}{bB}\right) a,$

$$\text{Pour 480, } n = \left(1 + \frac{A}{C}\right) a,$$

$$\text{Pour 481, } n = 2a,$$

n et a étant respectivement les rotations simultanées de la dernière roue et du rayon.

609. Pour le système de la figure 483, dans le premier cas, $\varepsilon = \frac{ce}{df}$, et comme le rayon étant supposé fixe, c et f tournent dans des directions opposées, ε est négatif; $\mu = \frac{a}{b}$ et $\nu = \frac{h}{g}$, et comme d'ailleurs g et b tournent dans des directions opposées, μ et ν doivent avoir des signes différents. La formule trouvée devient :

$$\frac{a}{p} = \frac{\mu\varepsilon - \nu}{1 + \varepsilon} = \frac{\frac{ace}{bdf} - \frac{h}{g}}{1 + \frac{ce}{df}} = \frac{aceg - hbdf}{bg\,(df + ce)}.$$

Pour le second cas, ε est négatif,

$$\mu = \frac{a}{b}, \ \alpha = \frac{h}{g},$$

et les signes de μ et ν sont différents; l'on a :

$$\frac{n}{p} = \alpha\,(1+\varepsilon) - \mu\varepsilon = \frac{g}{h}\left(1+\frac{ce}{df}\right)+\frac{ace}{bdf}.$$

610. Les systèmes épicycloïdaux ont de curieuses applications; nous allons en donner les exemples les plus remarquables. On les emploie :

1° Pour des mécanismes dont la production du mouvement épicycloïdal est le but, comme la plume géométrique déjà décrite pour le tracé des épicycloïdes, ou dans lesquels on utilise quelques propriétés de ce mouvement ;

2° Pour établir un rapport de vitesse déterminé avec une grande exactitude entre deux axes de position fixe, lorsque ce rapport est composé de termes qu'on ne peut faire entrer dans un ensemble de roues dentées à axe fixe ;

3° Pour produire un mouvement différentiel, une accélération ou retard d'un mouvement de rotation ;

4° Pour concentrer l'effet de deux ou plusieurs pièces différentes et indépendantes sur une même roue, quand l'action d'une ou plusieurs de ces pièces est variable.

611. Le rayon ou barre qui porte les axes reçoit diverses formes. En général, la partie qui se meut doit être aussi légère que possible, et comporter un petit nombre de roues, surtout quand la révolution se fait dans le plan vertical, parce qu'à cause de l'excentricité le poids est une cause de dérangement, à moins qu'il ne soit exactement équilibré. En général, quand le système non centré est nécessairement lourd, on en dispose les axes verticalement.

Premier cas.

TRACÉS DE COURBES ÉPICYCLOÏDALES. — PROPRIÉTÉS DES MOUVEMENTS PRODUITS.

612. *Premier exemple.* — *Paradoxe de Fergusson.* — Soit une roue Aede vingt dents fixée à un axe reposant sur le bâti qui supporte l'appareil (fig. 484). Un rayon CD tourne autour de cet axe et porte deux axes *m* et *n* qui y sont fixés. L'un d'eux sert d'axe à la roue B d'un nombre quelconque de dents qui engrène avec la roue A et l'autre aux trois roues E, F, G.

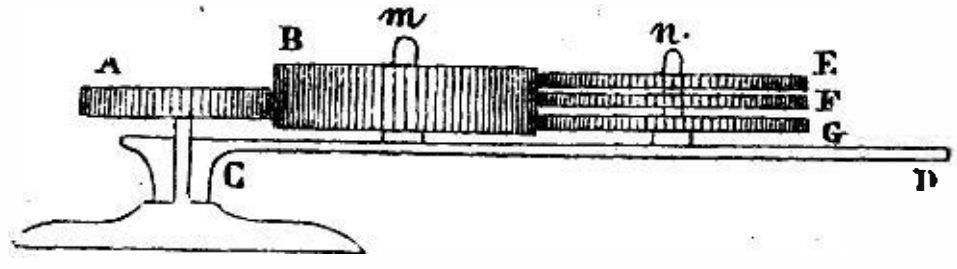


Fig. 484.

Quand le levier CD tourne, il communique le mouvement à ces trois roues, qui avec les roues A et B forment trois systèmes épicycloïdaux.

Les roues extrêmes de chaque train tournant dans le même sens, ε est positif ; la formule applicable à ce cas est $\frac{n}{a} = 1 - \varepsilon$, n et a étant les rotations simultanées et absolues de la roue et du levier.

Si $\varepsilon = 1$, $\frac{n}{a} = 0$, et la dernière roue du train n'a pas de rotation absolue. Si ε est plus grand que l'unité, la dernière roue tourne dans la même direction que le levier. Mais si ε est plus grand que l'unité, $\frac{n}{a}$ est négatif, et les rotations absolues du levier et de la roue sont de directions opposées.

Soient E, F, G, respectivement de 21, 20 et 19 dents ; dans le

train supérieur, $\varepsilon = \frac{A}{En} = \frac{20}{21}$ est plus petit que l'unité, la roue tourne dans le même sens que le levier.

Dans le train du milieu, $\varepsilon = \frac{A}{F} = \frac{20}{20}$, quantité égale à l'unité, $\frac{n}{a} = 0$, et F n'a pas de révolution absolue. Enfin, dans le train inférieur, $\varepsilon = \frac{A}{G} = \frac{20}{19}$ plus grand que l'unité, et G tourne en arrière.

Ainsi, par une même rotation du levier, E tourne dans le même sens que lui, G en sens contraire, et F reste en repos ; chaque point de sa circonférence demeure toujours dans la même direction. De là l'apparent paradoxe d'où provient le nom de cet appareil destiné à faire comprendre les propriétés des combinaisons de ce genre.

613. *Deuxième exemple. — Mouche ou roue planétaire.* — La disposition que nous allons décrire avait d'abord été employée par Watt pour convertir le mouvement alternatif du piston de la machine à vapeur en mouvement circulaire, alors qu'un brevet l'empêchait d'employer la manivelle. Sur l'axe du volant est montée une roue dentée A (fig. 485), qui engrène avec une roue dentée B fixée à l'extrémité de la bielle DB, le centre B étant réuni au centre A par le rayon BA qui maintient le contact des deux roues. Quand le piston par son action exercée sur le balancier entraîne le rayon BA, celui-ci tournerait autour du centre A comme une manivelle ordinaire, si la roue B attachée à la bielle DB ne venait modifier cette action.

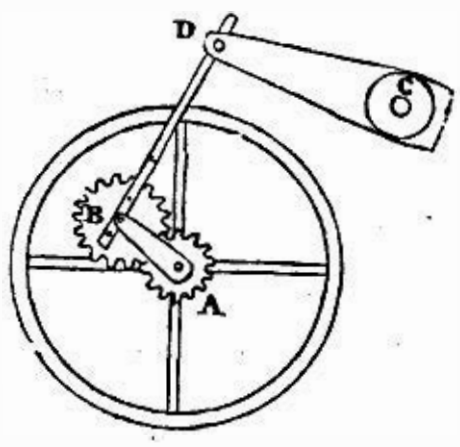


Fig. 485.

En effet, les roues A, B, avec le levier AB, constituent un train épicycloïdal, dans lequel $\frac{A}{B} = \varepsilon$ est négatif, puisque les roues tournent dans des directions opposées, et la dernière roue n'a

pas de rotation propre puisqu'elle est fixée à la bielle. La formule générale qui, est : $m = a + \frac{n - a}{\varepsilon}$, deviendra donc, en faisant

$n = 0$ et $\varepsilon = -\frac{A}{B}$, $\frac{m}{a} = 1 + \frac{B}{A}$.

Dans la machine de Watt les roues sont égales, par suite $m = 2a$, et le volant fait deux tours pour un de la manivelle.

614. Cet appareil est curieux et susceptible de quelques applications pour obtenir simplement des multiplications de vitesses.

Son effet s'analyse facilement en calculant les vitesses angulaires.

Soit V_1 la vitesse angulaire avec laquelle le centre B se meut autour de A, R le rayon de chacune des roues dentées, $2RV_1$ sera le chemin parcouru en une seconde par le centre de la roue B. Puisque cette roue est fixée invariablement à la bielle, tous les chemins parcourus simultanément par tous les points de cette roue sont égaux à celui que parcourt son centre, sont transportés comme lui. Ainsi $2RV_1$ sera aussi le chemin parcouru par la roue B à son point de contact avec la roue A. Soit V'_1 la vitesse angulaire de cette dernière, le chemin parcouru par le point de contact en tant qu'il appartient à la roue A sera représenté par $V'_1 R$. Donc $V'_1 R = 2V_1 R$ ou $V'_1 = 2V_1$; c'est-à-dire que la vitesse angulaire ou le nombre des tours du volant est double de la vitesse angulaire de l'extrémité de la bielle ou du nombre des oscillations complètes de celle-ci.

Et en général, si $AB = (n+1)R$, $V'_1 = (n+1)V_1$.

615. M. Saladin, de Mulhouse, a publié un curieux travail sur la *mouche*, sur les diverses vitesses qu'on peut obtenir suivant le rapport des rayons R et R′ des roues.

Les vitesses des deux roues, l'une fixée à la bielle, l'autre montée sur l'arbre du volant, étant dans le rapport de 1 à $1 + \frac{R}{R'}$, on voit que pour :

$R = R'$, chaque oscillation donne 2 tours du volant,
$R = 2R'$ » 3 »

$R = \frac{1}{2} R'$, chaque oscillation donne $1 + \frac{1}{2}$ tours du volant, et ainsi de suite.

On aura donc ainsi un nombre de tours du volant plus grand que le nombre d'oscillations de la bielle et dans le rapport que l'on voudra, pourvu que le mouvement de la bielle ait une amplitude convenable.

Si l'on voulait obtenir un nombre de rotations inférieur à celui des oscillations de la bielle, on ne pourrait y parvenir par le système précédent. Mais si l'on interpose entre les deux roues une roue intermédiaire quelconque, l'effet de cette roue est de changer le sens de la rotation due à l'engrènement, et le rapport des vitesses devient $1 - \frac{R}{R'}$. En effet, si la roue fixée à la bielle tourne dans un sens, l'engrenage au moyen de la roue intermédiaire communique une rotation inverse, et le résultat définitif sera la différence de ces deux mouvements.

Ainsi $R = R'$ donne zéro; le balancier marchant, l'arbre du volant n'aura pas de rotation; $R = 2R'$ donne -1 ou un tour en arrière; $R = \frac{R'}{2}$ donne $\frac{1}{2}$ tour dans le sens du mouvement de la bielle.

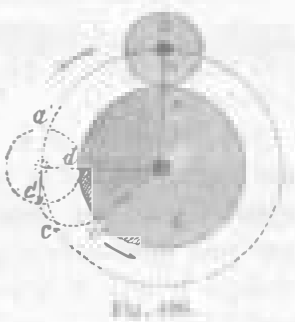
On voit ainsi comment, pour un même mouvement de la bielle, l'arbre du volant peut rester fixe, ou tourner soit à droite, soit à gauche, avec une vitesse qu'on est libre de varier avec les engrenages.

Les mêmes effets peuvent s'obtenir au moyen de poulies et de courroies ou de cordes. Si la courroie est croisée, l'effet est le même qu'avec deux roues de mêmes rayons que les poulies, tandis que la courroie non croisée répond au même système augmenté d'une roue intermédiaire.

616. Nous empruntons à M. Saladin deux figures qui indiquent bien les circonstances du mouvement.

Dans le système représenté fig. 486, dans lequel la roue fixe est double de la roue stellaire, la rotation du volant est de 1 tour

et demi pour une oscillation du balancier. En effet, considérons la roue stellaire après qu'elle a parcouru un quart de circonférence; le rayon vertical ac est toujours vertical en $a'c'$, puisque la roue ne tourne pas. Cherchons ce qu'est devenu le point c sur la roue b.



Si le disque a, au lieu d'être fixé à la belle, eût été fixé à la manivelle, le cercle b eût tourné d'un quart de circonférence et le point de contact fût resté constant. Mais comme cette roue a est fixée à la bielle, le point de contact primitif s'est éloigné par l'effet des dents des roues, en parcourant des longueurs égales sur les deux circonférences à partir du point de contact. Si donc on développe dc' et qu'on enveloppe cet arc sur la circonférence b, c'' sera la nouvelle position du point c, et la rotation de b pour celle de $\frac{1}{4}$ de a sera:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{3}{8}, \text{ puis que } dc'' = \frac{1}{4}a = \frac{1}{8}b.$$

Le rapport des vitesses sera donc de 1 à $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$.

La figure 487 représente un système à trois roues, a roue de commande et à translation, c roue intermédiaire mobile, b roue commandée d'un rayon double de celui de la roue motrice. Lorsque le disque a est venu en a', son rayon d restant vertical sera venu en d'. Si du point de contact e, comme centre du mouvement, nous développons l'arc ed' pour le reporter sur le disque c, nous trouvons que le rayon f du cercle c est venu en f', et que le rayon opposé g est venu en g'; si enfin

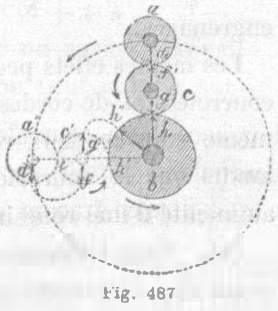
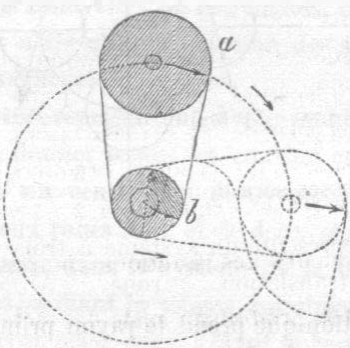


Fig. 487

du point de contact h' nous reportons sur b l'arc développé $g'h'$, la développante qui part du point g' rencontrera b en h'', et le rayon vertical b aura parcouru $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ seulement de tour pour $\frac{1}{4}$ de tour de a, soit $\frac{1}{2}$ tour de b pour un tour de a.

On voit que si les rayons de a et b étaient égaux, b resterait immobile, les deux mouvements en sens contraire étant égaux, et qu'enfin si la roue stellaire était celle du plus grand rayon, le mouvement serait rétrograde.

617. La figure 488 représente le cas d'un tour en arrière en employant des courroies croisées, et dit une roue a d'un rayon double de celui de la roue b. Après un quart de tour, les positions relatives des points situés au départ sur des rayons perpendiculaires au même brin s'obtiendront en enroulant sur la circonférence de a, à partir de la position du rayon primitif, une



longueur de la courroie égale à un quart de la circonférence et l'enroulant autour de la seconde par la rotation de celle-ci ; c'est-à-dire en traçant deux arcs de développantes. La rotation définitive sera $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times 2 = -\frac{1}{4}$, puisque $\frac{1}{4}$ de $a = \frac{2}{4}$ de b. Pour une rotation complète de a, la rotation de b sera donc de -1, ou un tour en arrière.

618. Nous avions d'abord supposé que la bielle restait toujours parallèle à elle-même, était infinie; les tracés précédents montrent comment, quand la bielle est courte, les inégalités de la vitesse de rotation croissent avec les inclinaisons de la bielle, et que cette vitesse est plus grande dans les parties placées au-dessus du diamètre horizontal que pour celles placées au-dessous (la position moyenne de la bielle étant supposée verticale). Cela

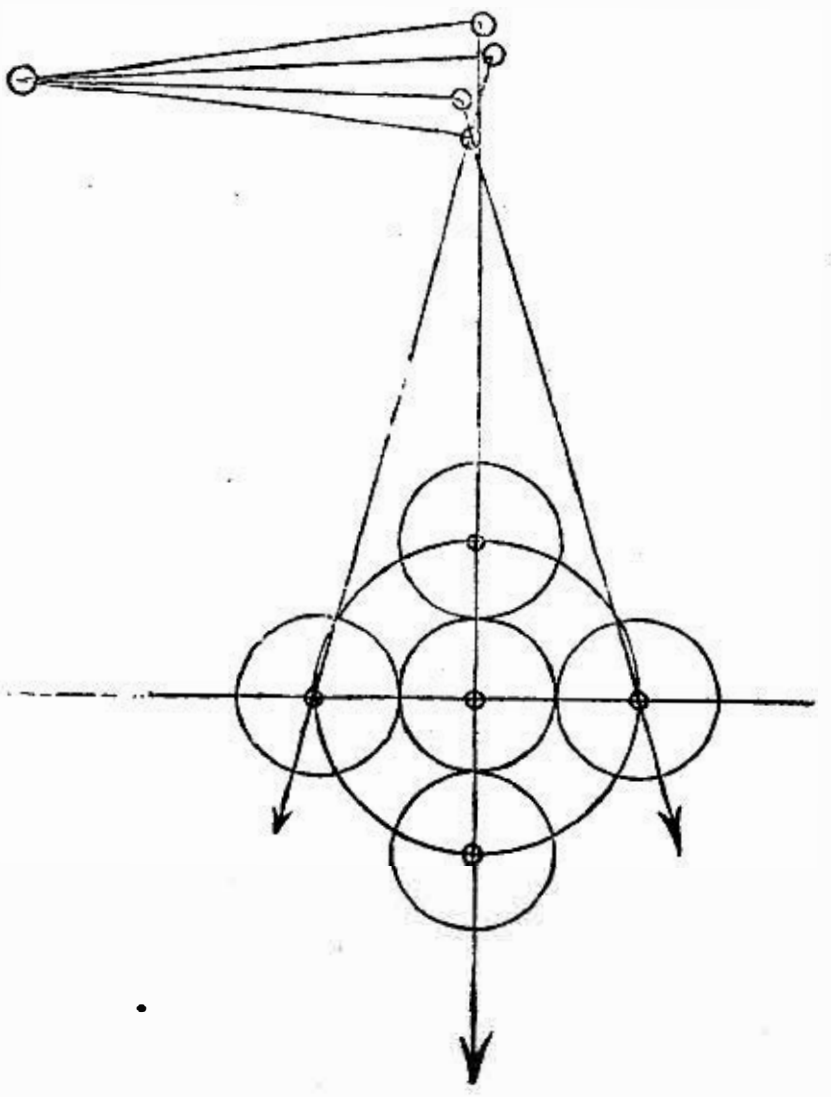


Fig. 489.

résulte de la position que prend le rayon primitivement vertical de la roue stellaire; comme il reste toujours dans la direction de la bielle, l'axe à retrancher ou à ajouter devient tantôt plus grand, tantôt plus petit que dans le cas de la bielle infinie. C'est ce que la figure 489 fait bien voir.

Tracé des courbes épicycloïdales.

619. Les mouvements que nous venons d'étudier ne sont pas seulement curieux quant aux vitesses, mais encore quant aux courbes qu'ils permettent de tracer. Bien que ne comportant que des guidesadu mouvement circulaire, et par suite facilement exécutables, ces systèmes fournissent des courbes transcendantes, des figures très-variées et pouvant parfaitement s'appliquer dans les arts pour certains cas de décoration, de guillochage; le moyen de les produire par quelques mouvements simples a déjà été réalisé dans quelques tours.

Biena qu'il soit difficile de prévoir toutes les formes de ces courbes aussi complétement que si elles étaient représentées par des équations d'un degré peu élevé, néanmoins on peut déduire les principaux caractères de leurs formes, de l'étude précédente des vitesses : le nombre desapoints de rebroussement ou des boucles, la direction des concavités ou convexités, etc.

620. Complétons d'abord la description des systèmes propres à tracer les courbes épicycloïdales.

Les fig. 479 et 480 représentent d'une manière générale les systèmes propres à donner toutes les courbes concaves ou convexes par rapport au centre du mouvement. Supposons le système formé de deux roues A, E, et de deux pignons b, B. Nous avons vu qu'on avait, dans le système de la fig. 479, pour le rapport des vitesses, n étant la vitesse angulaire de la roue extrême, a celle du rayon porte-roue, ε étant le rapport des vitesses de rotation :

$$n = (1 - \varepsilon)\, a = \left(1 - \frac{A\,E}{b\,B}\right) a.$$

Si au lieu de tourner dans un sens inverse du mouvement du levier la dernière roue tournait dans le même sens, comme dans une disposition analogue à celle de la fig. 480, ε serait de signe différent que dans le cas précédent, et on aura :

$$n = (1 + \varepsilon)\, a = \left(1 + \frac{A\,E}{b\,B}\right) a,$$

avec deux roues et deux pignons.

Ces systèmes comprenant dans l'équation de leurs vitesses des rapports quelconques pour les deux sens du mouvement, seront donc propres à fournir toutes les indications sur les courbes que nous avons à étudier ici ; les équations sont tout à fait générales.

La première répond à un roulement sur l'extérieur d'un cercle avec un mouvement *inverse*, la seconde à un mouvement *direct*, à un roulement dans l'intérieur, par suite en changeant le sens de la convexité de la courbe par rapport au centre du mouvement.

621. Ceci posé, il est bien évident que l'on ne pourra obtenir de courbes fermées qu'autant que ε sera exprimé par une fraction dont les termes seront entiers; le point décrivant ne repassera jamais par le point de départ si un des nombres est incommensurable. Dans le cas contraire, comme on le voit aisément en considérant les révolutions relativement au levier, que ne change pas le mouvement d'entrainement général du système qui cause la rotation des roues dentées, en supposant le système fixe et la première roue conductrice, le point décrivant reviendra toujours exactement à la position initiale; la courbe sera donc fermée.

622. I. Considérons d'abord le cas plus simple où il n'y a pas de pignon intermédiaire ou $b = E$, de telle sorte que $\varepsilon = \frac{A}{B}$, se réduit au rapport des rayons du cercle fixe et de l'épicycle. On aurait de véritables épicycloïdes, si le cercle décrivant était en contact avec le cercle fixe, et dans le cas général, une ou plusieurs roues intermédiaires étant interposées entre eux, des courbes ayant les mêmes rayons vecteurs que les épicycloïdes, augmentés d'une quantité constante, mais pour des angles plus grands ou plus petits en raison du sens de la rotation.

Examinons d'abord les courbes obtenues lorsque le numérateur de la fraction ε est l'unité.

Pour le premier cas, la forme $n = (1 - \varepsilon)\, a$, donne toujours pour le numérateur de la fraction définitive une unité de moins

que le dénominateur de la fraction de la forme $\frac{1}{\alpha}$ que nous supposons être ici la forme de la valeur de ε;

ainsi, si $\varepsilon = \frac{1}{3}$, $n = \frac{2}{3}\alpha$.

En effet, la barre qui entraîne la roue mobile autour de la roue fixe fait un tour avant que le point traçant revienne à sa position primitive, ce qui répond à trois tours de la roue extrême pour un de la roue fixe, si on faisait mouvoir celle-ci; mais comme dans l'entraînement général une rotation inverse est en outre produite par celle de la barre, celle qui produit des points de rebroussement, *relative* au levier, ne comprend que deux tours, ne peut fournir que deux points plus rapprochés du centre de rotation que ceux tracés pendant tout le reste du mouvement.

Donc toutes les courbes dont il s'agit ont un nombre de points de rebroussement moindre d'une unité que le dénominateur de la fraction qui exprime le rapport des rayons. Il est d'ailleurs évident que ces courbes épicycloïdales tournent leur concavité vers le centre du mouvement.

La vérification de ceci se trouve dans les figures 490 à 495 des courbes tracées par l'emploi d'un appareil mécanique, qui est une réalisation matérielle de la disposition de la fig. 479.

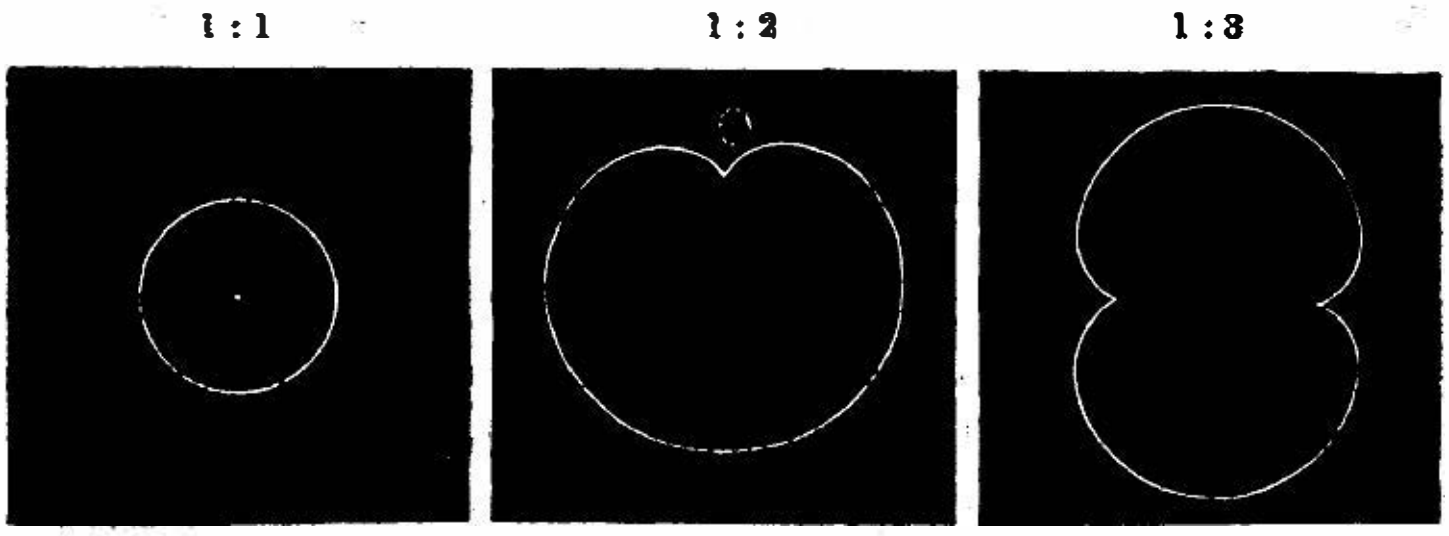


Fig. 490. Fig. 491. Fig. 492.

Pour le rapport $\frac{1}{1}$ (fig. 490), $n = \alpha$, c'est le cas du paradoxe de Fergusson donné plus haut; l'épicycle étant immobile par rapport au levier, tournant exactement comme le levier par rapport

au cercle fixe, tous ses points décrivent également des cercles autour du centre du mouvement.

1 : 4 1 : 5 1 : 6

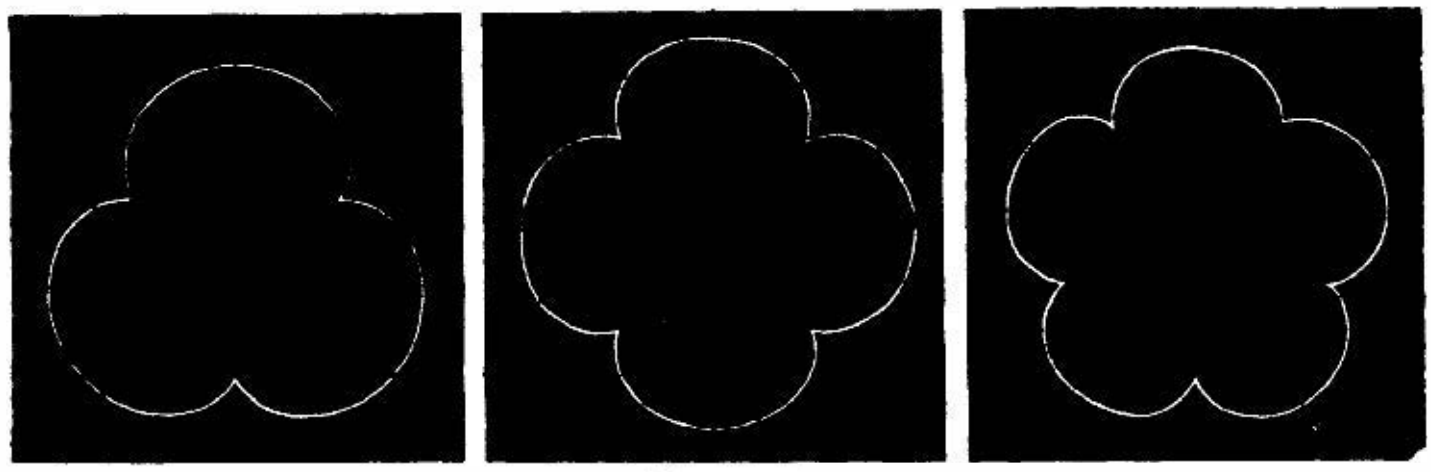


Fig. 493. Fig. 494. Fig. 495.

Pour $\frac{1}{2}$, $\frac{n}{a} = \frac{1}{2}$, en un tour le point décrivant sera revenu à sa position initiale, et un des tours indiqué pour la relation $B = 2A$ étant détruit par l'entraînement du levier, n'existant pas relativement, il n'y aura qu'un point de rebroussement.

Pour le rapport $\frac{1}{4}$, $\frac{n}{a} = \frac{3}{4}$, 3 est le nombre de rotations relatives au levier; la rotation absolue étant diminuée de celle d'entraînement, il y aura trois points de rebroussement, et ainsi de suite.

Pour toutes les autres courbes, les arcs épicycloïdaux égaux vont en se multipliant, et l'apparence de toutes ces courbes se trouve parfaitement déterminée.

623. Passons au deuxième cas, le rapport $\frac{n}{a}$ des vitesses étant donné par $1 + \varepsilon$, on voit, en raisonnant comme ci-dessus, que le nombre des points de rebroussement des courbes produites est plus grand d'une unité que le dénominateur de la fraction; l'entraînement du levier s'ajoutant à la rotation de la roue. Il est d'ailleurs facile de reconnaître que ces courbes tournent leur convexité vers le centre du mouvement.

Les figures 496 à 501 indiquent les courbes dont nous parlons.

Le rapport $\frac{1}{1}$ ou $A = B$ et $n = 2a$, donne une ligne droite, le

mouvement étant celui d'un point de la circonférence d'un cercle roulant dans l'intérieur d'un autre cercle de rayon double. Un autre point de la surface du cercle mobile décrit des ellipses d'après les propriétés de ce mouvement (art. 163).

1 : 1 1 : 2 1 : 3

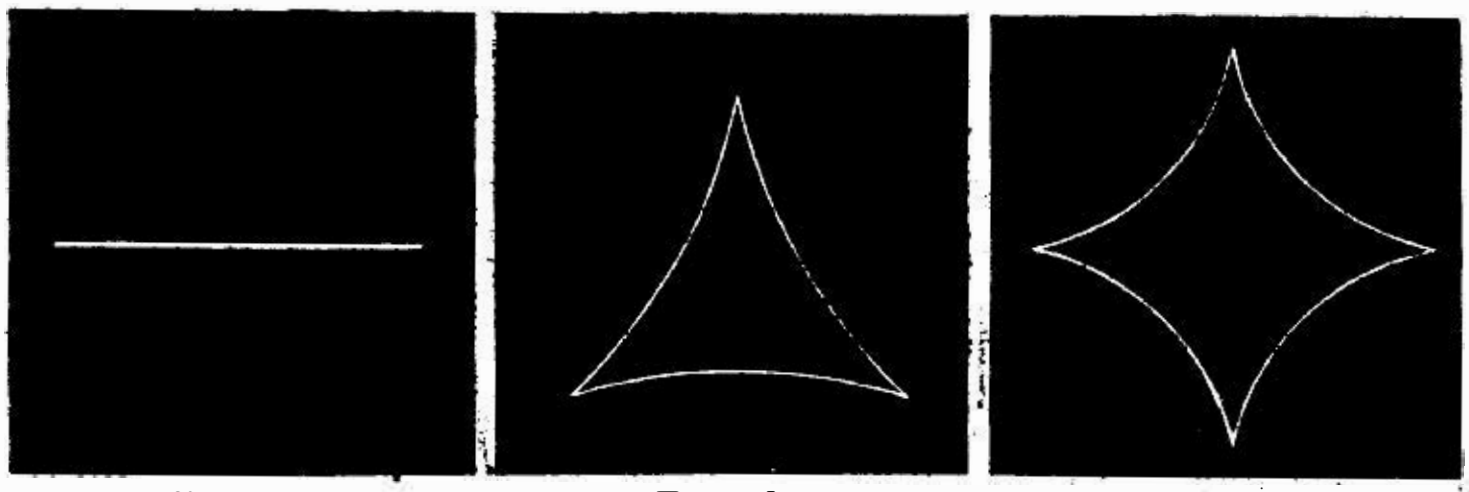


Fig. 496. Fig. 497. Fig. 498.

Le rapport 1 : 2 donne $n = 3a$ et trois points de rebroussement, et ainsi de suite; le genre de ces courbes est encore parfaitement défini.

1 : 4 1 : 5 1 : 6

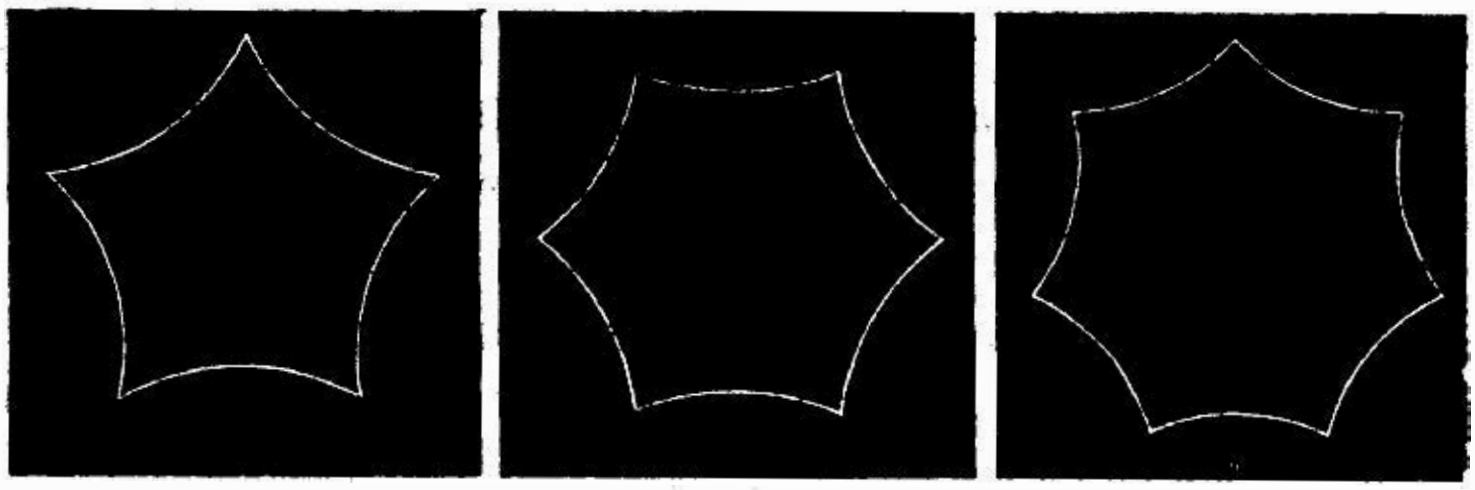


Fig. 499. Fig. 500. Fig. 501.

624. Examinons maintenant ce qui arrive quand la valeur de ε n'est plus donnée par des fractions ayant le numérateur égal à 1, mais toujours formées de nombres entiers. Dans le premier cas, les courbes toujours concaves vers le centre du mouvement, ayant leurs points de rebroussement symétriquement disposés autour de ce centre et à l'intérieur de la courbe, posséderont un nombre de points de rebroussement égal à la différence des deux termes de la fraction et un nombre d'involutions égal au numérateur (une droite rencontrera la courbe de chaque côté du centre en un nombre de points égal au numérateur). Cela résulte bien

évidemment de ce que l'on doit retrancher la rotation absolue de la roue de celle du levier; de la forme de l'expression :

$$n = (1 - \varepsilon)\, a.$$

Soit : $\varepsilon = \frac{2}{7}, n = \left(\frac{7}{7} - \frac{2}{7}\right) a = \frac{7-2}{7}\, a = \frac{5}{7} a,$

comme $\frac{A}{B} = \frac{2}{7}$, B devrait faire sept tours pendant que A en ferait deux s'il s'agissait d'un mouvement ordinaire de roues dentées; mais par l'entraînement du levier qui produit en outre deux tours de B en sens inverse par deux révolutions, la rotation absolue de la roue entrainée B sera $7 - 2 = 5$ tours. Il existera par suite cinq positions symétriques, cinq points de rebroussement (fig. 505) et une droite partant du centre (répondant à une position périodique du levier), ne pourra pas rencontrer la courbe tracée en plus de deux points, puisque c'est toujours après deux tours de la roue mobile (l'entraînement ne modifiant pas, sous ce rapport, les périodes de la courbe), que la courbe tracée sera fermée.

On voit que les courbes les plus complexes, qui pourront le mieux convenir au guillochage, à l'ornementation des surfaces par gravure mécanique, seront surtout celles pour lesquelles le dénominateur sera assez grand, et par suite aussi le nombre des points de rebroussement symétriquement disposés autour du cercle.

Nous donnons (fig. 502 à 507) les dessins de quelques-unes de ces courbes.

2 : 3

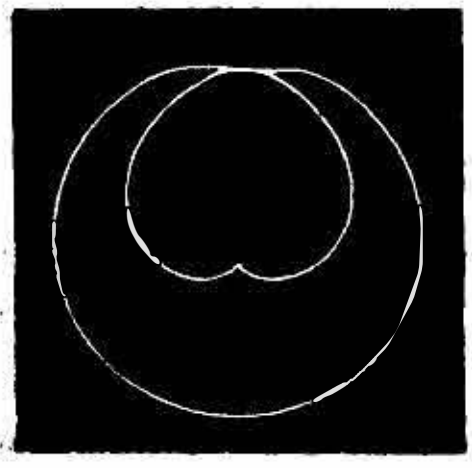


Fig. 502.

3 : 5

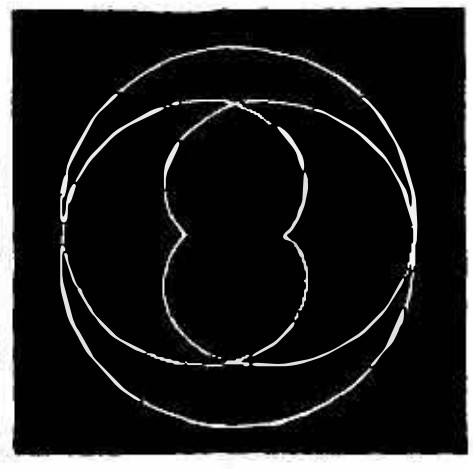


Fig. 503.

2 : 5

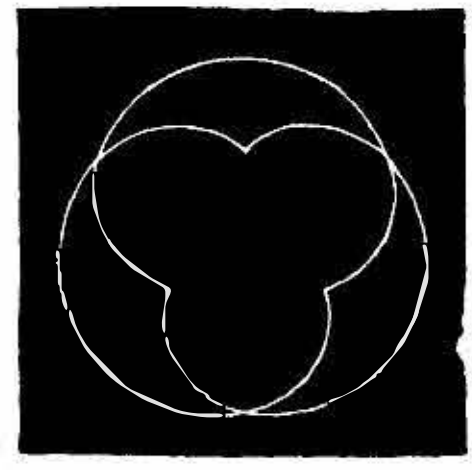


Fig. 504.

2 : 7 3 : 4 9 : 17

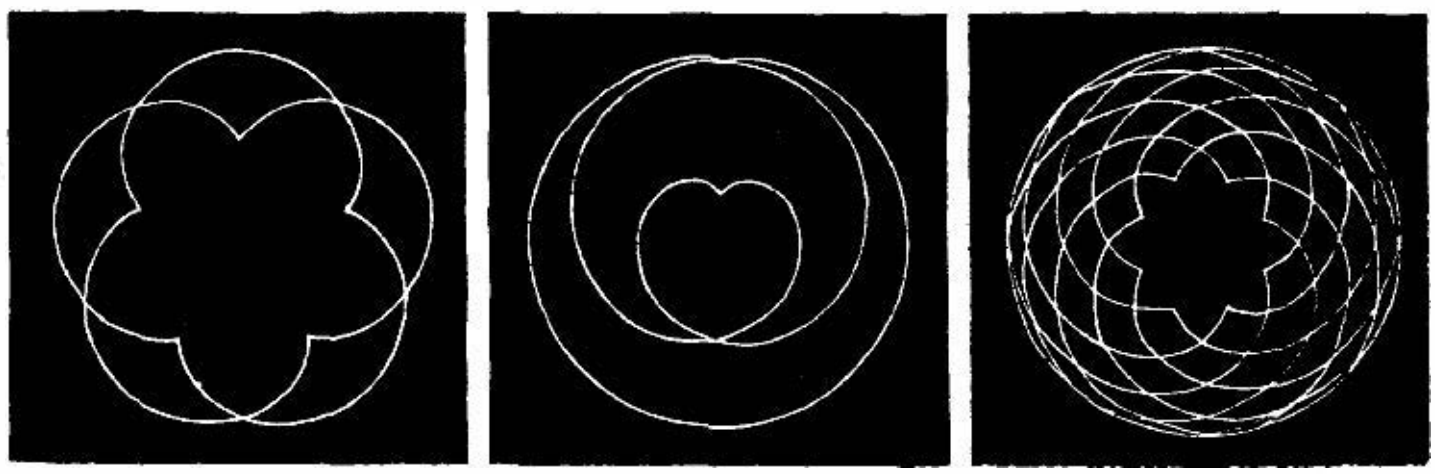


Fig. 505. Fig. 506. Fig. 507.

625. Dans le second cas, l'expression de la valeur de n donne un nombre de points de rebroussement égal à la somme des deux termes de la fraction, réduite en nombres premiers, et ces points symétriquement disposés sont situés extérieurement. On peut encore le reconnaître directement, en distinguant les vitesses absolues, des mouvements des roues entraînées par le levier qui tracent les courbes que nous considérons, vitesses obtenues en

2 : 3 2 : 5 3 : 4

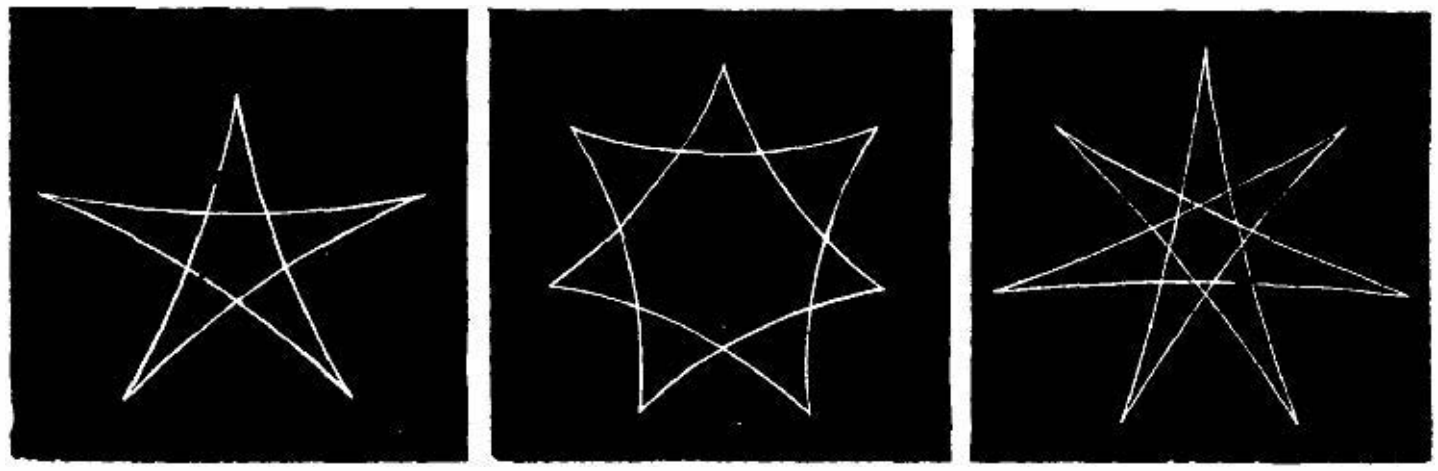


Fig. 508. Fig. 509. Fig. 510.

ajoutant le mouvement du levier au mouvement relatif. Ces propriétés se déduisent immédiatement de la forme de l'expression $n = (1 + \varepsilon)a$, dont nous partons toujours. Le nombre des involutions des points de rencontre d'une droite passant par le centre est toujours donné par le numérateur de la fraction qui représente ε.

Nous donnons, fig. 508 à 513, quelques-unes de ces courbes.

II. 626. *Effet des pignons intermédiaires.* — Considérons maintenant le cas général où le rapport $\frac{E}{b}$ de la formule générale n'est pas égal à 1, où l'on fait intervenir des pignons. Les

principaux caractères des courbes alors engendrées se déduiront comme dans le cas précédent des formules générales, en remarquant que le rayon plus ou moins grand du cercle traçant change la nature des points de rebroussement, les remplace par une boucle ou par une petite ligne, et ainsi modifie en quelque sorte l'allure de la courbe. Les courbes que l'on obtient

3 : 5

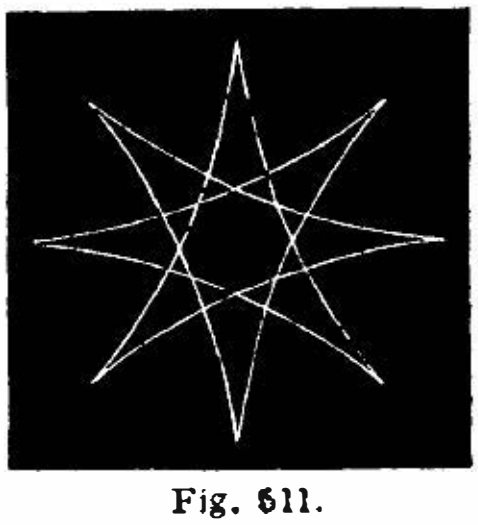


Fig. 511.

4 : 5

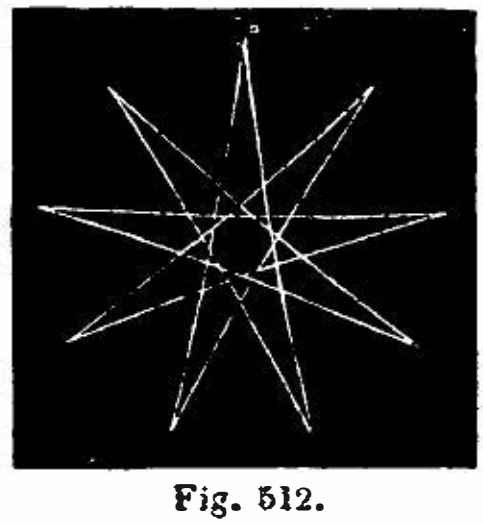


Fig. 512.

3 : 7

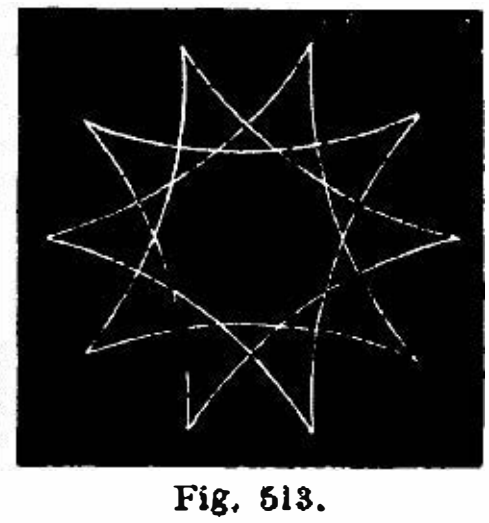


Fig. 513.

sont toujours des courbes épicycloïdales, mais des épicycloïdes doublement transformées, non-seulement en raison du rayon qui porte l'axe du cercle mobile, mais encore du rayon de celui-ci pour un même rapport de vitesse. C'est ce qui va être rendu clair par quelques exemples.

627. Citons d'abord le cas où $\frac{E}{b} = \frac{A}{B}$, le rapport ε des cas précédents sera remplacé par ε^2 pour les exemples correspondants.

Les figures similaires sont assez curieuses à étudier, et les caractères généraux des secondes dérivent de celles du cas correspondant au rapport simple, en aplatissant en quelque sorte

1 : 4

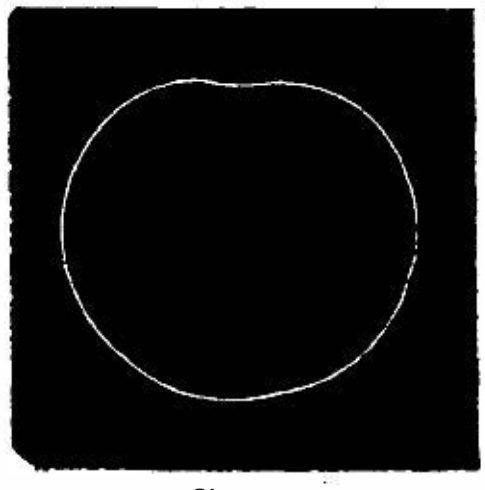


Fig. 514.

1 : 9

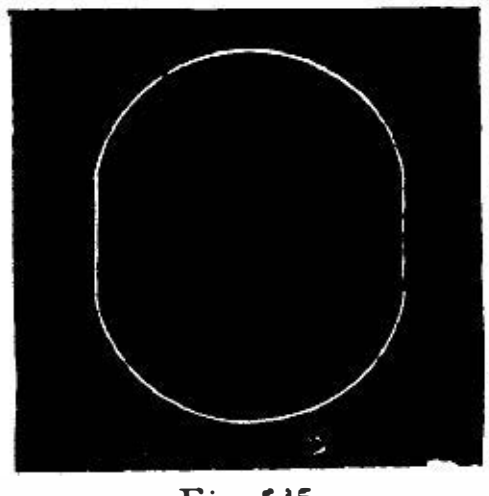


Fig. 515.

$9^2 : 17^2$ ou 81 à 289

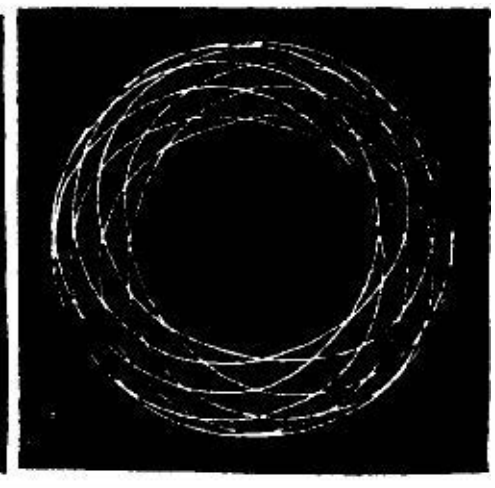


Fig. 516.

tous les angles. On en juge aisément par les fig. 514 à 519 : les trois premières se rapportant au mouvement inverse, les trois dernières au mouvement direct.

1 : 4 1 : 9 4 : 9

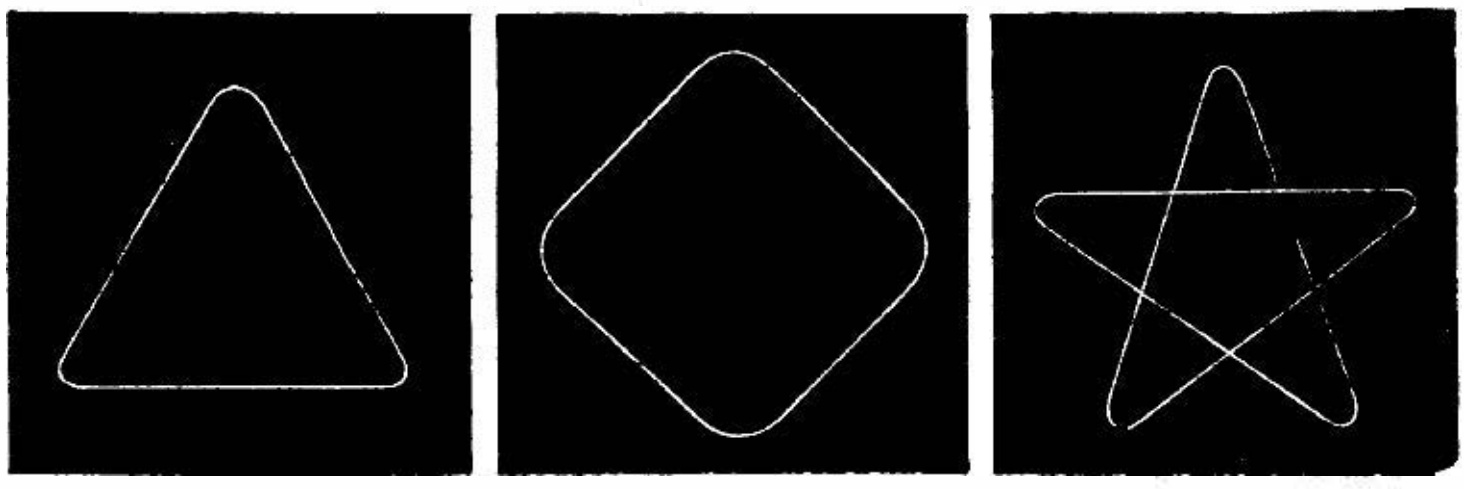


Fig. 517. Fig. 518. Fig. 519.

On pourrait encore étudier les puissances supérieures, mais il vaut mieux passer à un autre mode de classement général de toutes ces courbes dont nous allons parler.

628. Revenons aux résultats que l'on obtient en donnant au rapport $\frac{E}{e}$ des rotations du système intermédiaire diverses valeurs numériques. Comme dans l'étude précédente, nous avons compris tous les rapports possibles de vitesses, les relations indiquées subsistent toujours, les caractères généraux des courbes sont donc les mêmes pour une même valeur de ε.

Rayons 1 : 2 2 : 3 1 : 1

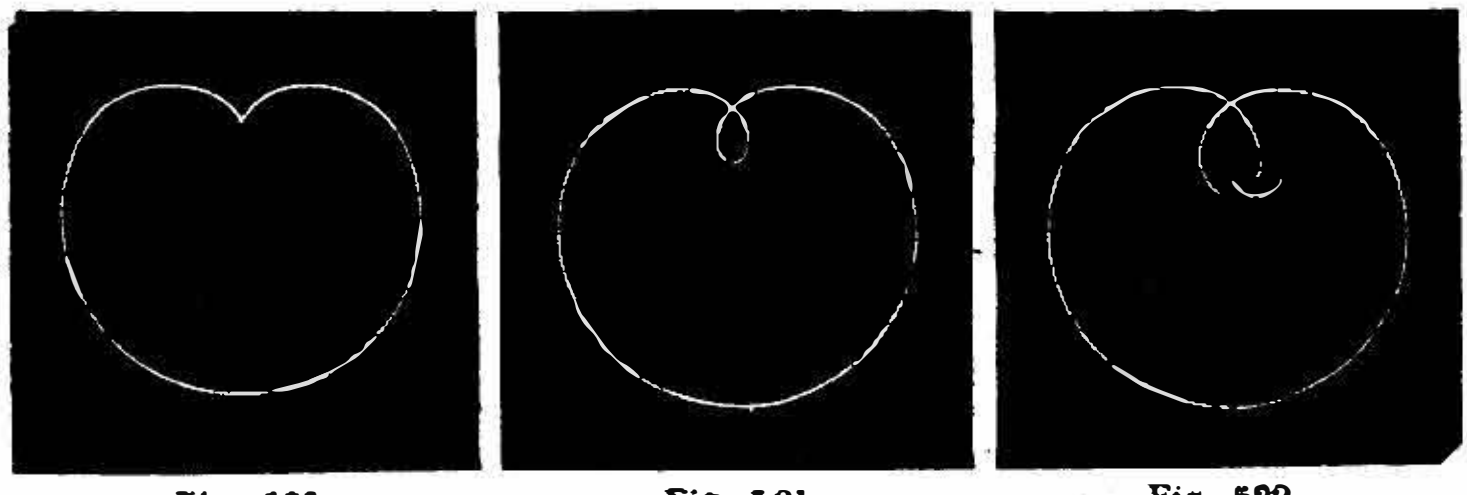


Fig. 520. Fig. 521. Fig. 522.

Cela conduit à classer les courbes épicycloïdales comme le propose M. Perigal, auteur anglais, qui a tracé un grand nombre de ces courbes à l'aide de moyens mécaniques, non plus d'après le rapport des rayons, mais d'après la valeur totale de ε, ce qui

range sous la même division toutes les courbes qui ont le même nombre de points de rebroussement, de boucles.

Rayons 1 : 16 1 : 4 1 : 3

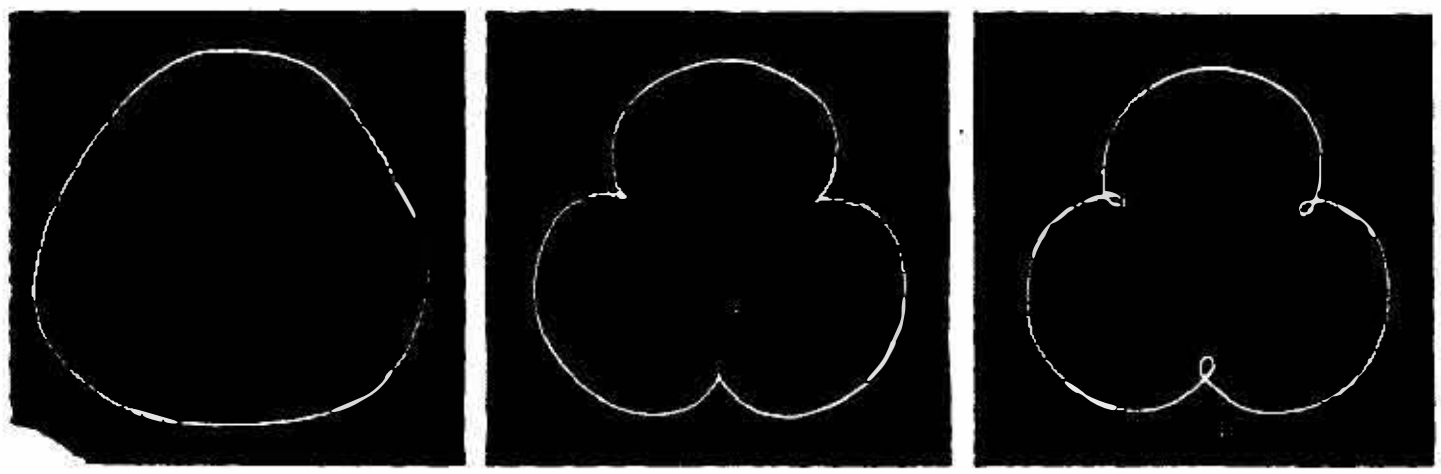


Fig. 523. Fig. 524. Fig. 525.

Soit à mouvement inverse $\varepsilon = \frac{1}{2}$, si $\frac{A}{B} = \frac{1}{2}$ nous retrouvons $b = E$ le cas déjà traité (fig. 520), un seul point de rebroussement.

Si $\frac{A}{B} = \frac{1}{4}\frac{E}{b} = 2$, on revient au cas $\frac{1}{2^2}$. Le point de rebroussement disparaît presque.

$\frac{A}{B} = \frac{1}{1}\frac{E}{b} = \frac{1}{2}$, c'est une courbe à une boucle comme toutes les courbes de cette série. La boucle s'agrandit à mesure que le premier facteur augmente et le second diminue.

Les figures 523 à 525 représentent, de même que quelques courbes, pour la valeur de $\varepsilon = \frac{1}{4}$ et divers rapports des rayons des roues A et B.

Rayons 1 : 1 2 : 3 1 : 2

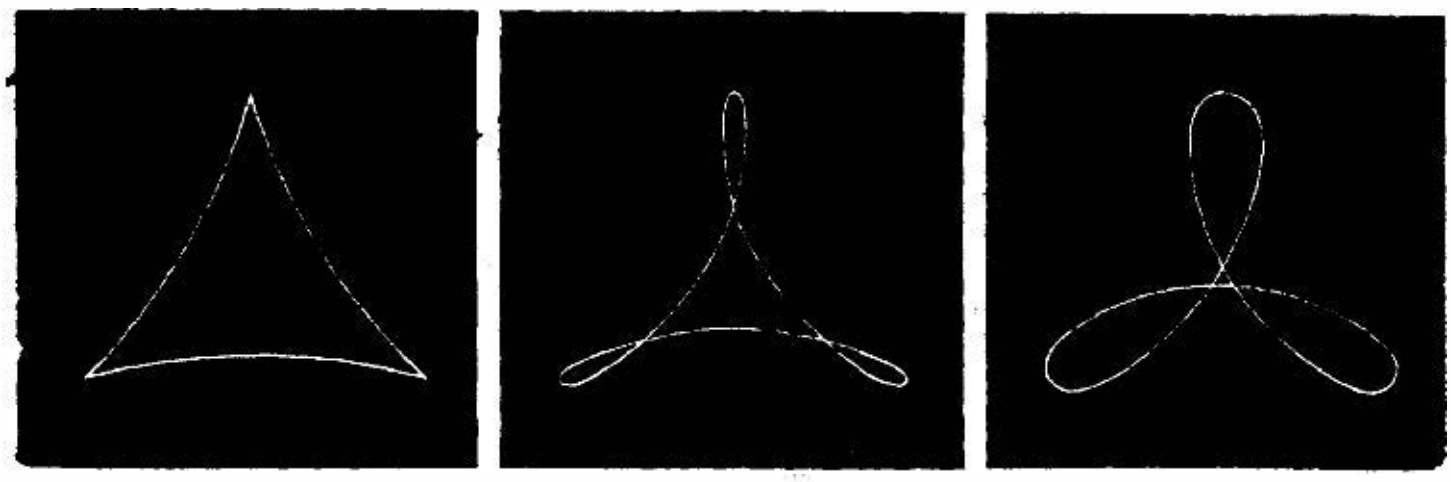


Fig. 526. Fig. 527. Fig. 528.

Les courbes correspondant aux épicycloïdes intérieures, produisant un mouvement direct, offrent des combinaisons analogues faciles à analyser en partant de la formule $n = (1 + \varepsilon)\,a$.

Rayons 1 : 3 | 1 : 2 | 3 : 4

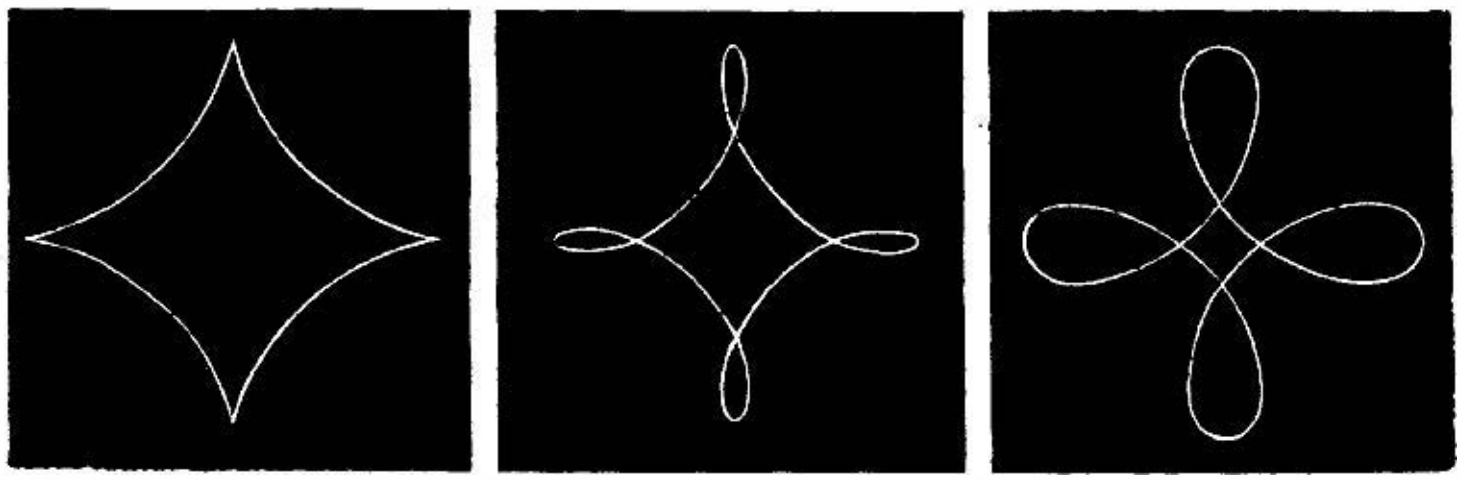


Fig. 529. Fig. 530. Fig. 531.

Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}$ en donnant à $\frac{A}{B}$ les valeurs $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, 1, on a pour $\frac{E}{b}$ les valeurs 1, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, et on obtient les courbes à 3 boucles numéros 526 527 et 528.

De même $\varepsilon = \frac{1}{3}$ donnera les courbes à 4 saillies ou 4 boucles numéros 529, 530 et 531.

Soit encore $\varepsilon = \frac{5}{11}$, $\frac{A}{B} = \frac{5}{11}$, $E = b$, courbe à 6 points de rebroussement.

$\frac{A}{B} = \frac{1}{1}$, $\frac{E}{b} = \frac{5}{11}$, courbe à 6 nœuds (fig. 532) comme toutes celles de la série.

Enfin soit $\varepsilon = \frac{2}{7}$ $\frac{A}{B} = \frac{1}{1}$, $\frac{E}{b} = \frac{2}{7}$ courbe à 5 boucles (fig. 533).

$\frac{A}{B} = \frac{3}{2}$, $\frac{E}{b} = \frac{4}{21}$, les 5 boucles se recoupent au delà du centre (fig. 534).

Rayons 1 : 1 | 3 : 2 | 1 : 1

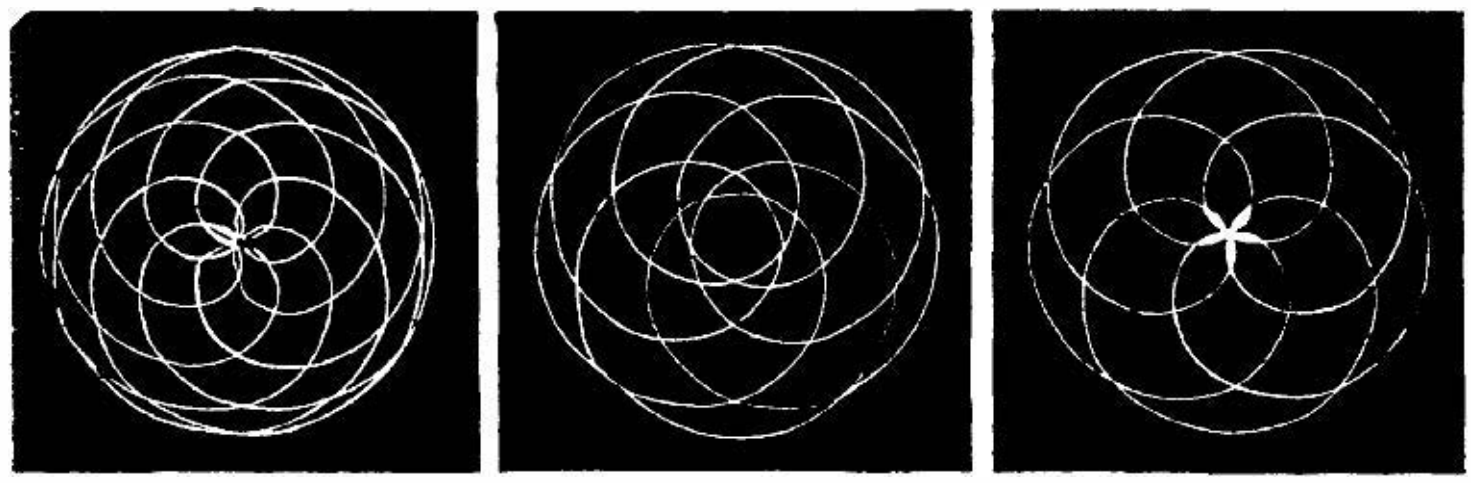


Fig. 532. Fig. 534. Fig. 533.

Le classement ainsi effectué entre les courbes de formes variées à l'infini pouvant être ainsi engendrées par l'emploi de simples pièces à rotation circulaire est d'un grand intérêt au point de vue des applications possibles.

629. Il est bien évident que l'on pourrait obtenir des tracés de courbes cycloïdales en faisant glisser un système de roues sur une crémaillère fixe, et obtenir ainsi des courbes en boucle se reproduisant les unes à la suite des autres, ces courbes étant semblables et les mêmes points de chaque courbe étant situés sur une droite parallèle à l'axe de la crémaillère.

630. Cette étude des courbes variées complète ce que nous avons dit sur le tracé mécanique des courbes, et limite bien l'étendue de celles que l'on peut obtenir sans *rosette* spéciale.

Sans doute, suivant l'ingénieuse remarque de Bernouilly, d'une manière générale, les épicycloïdes produites par le roulement d'une courbe plane continue et quelconque sur une autre courbes peuvent être des courbes continues et planes quelconques, et par suite on peut toujours reproduire le mouvement quelconque d'un point dans un plan par le roulement réciproque de deux courbes déterminables graphiquement, dont l'une est liée à ce plan qu'elle entraîne autour de l'autre censé fixe. Mais cette théorie, dans sa généralité même, qui fait de toute courbe une épicycloïde, prouve qu'il faut dans chaque cas une courbe directrice spéciale; ce n'est que dans le cas particulier des épicycloïdes circulaires que le guide tour des coussinets suffit. On ne peut obtenir ainsi, et c'est ce qu'il importait de démontrer, que des épicycloïdes circulaires et des courbes qui en dérivent simplement, mais la variété de courbes semblables d'ordre aussi élevé que l'on veut, fournit des ressources importantes à l'art de graver des surfaces par procédé mécanique dont la pratique de l'industrie peut tirer un grand profit.

SECONDE CLASSE DE SYSTÈMES ÉPICYCLOIDAUX.

631. Nous allons étudier l'emploi des systèmes épicycloïdaux pour établir un rapport exact de vitesse angulaire entre deux axes par des sommes ou des différences de rapports, lorsqu'il ne peut être obtenu par le seul emploi de roues dentées et lorsqu'une simple approximation est inadmissible.

Nous avons vu (art. 607) que si ε est la raison d'un système épicycloïdal et si l'axe menant est réuni avec la première roue par un système dont la raison est μ, et avec la dernière roue par un système dont la raison est ν, on a :

$$\frac{a}{p} = \frac{\mu}{1 - \frac{1}{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1 - \varepsilon},$$

quand a et p sont les rotations simultanées du rayon portant le rouage et de l'axe qui conduit; c'est-à-dire que l'effet des deux trains μ et ν est concentré sur l'axe du levier.

Ce système est appliqué sous une forme simple dans la disposition représentée sur la figure 535.

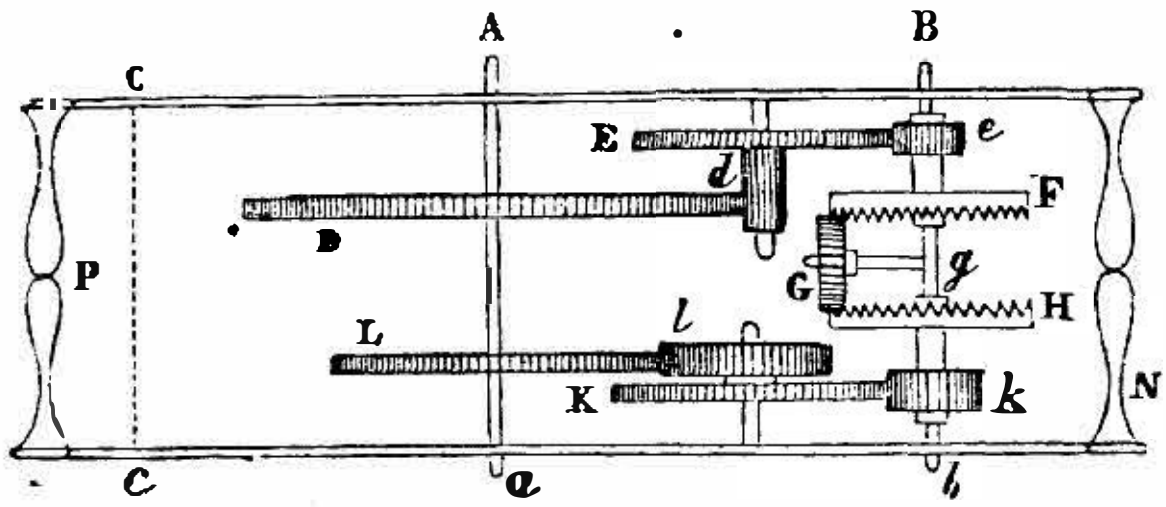


Fig. 535.

B b est un axe sur lequel est monté le levier G g, qui porte la roue G; celle-ci engrène avec deux roues égales F et H, qui sont concentriques avec l'axe B b, mais sont montées sur des tubes qui tournent librement autour de celui-ci.

Le système épicycloïdal consiste donc en trois roues F, G, H; F pouvant être considérée comme la première roue et H comme la dernière.

A a est l'axe moteur qui porte les deux roues D et L; D sert à mettre l'axe en rapport avec la première roue F du système épicycloïdal (avec le tube qui la porte) au moyen du système de roues dentées et pignons d, E, e; de même L constitue avec l, K et k un système de roues dentées qui réunit l'axe A a avec la dernière roue H. On a par suite :

$$\mu = \frac{DE}{de} \text{ et } \nu = \frac{LK}{lk}.$$

Le mouvement du train épicycloïdal étant considéré par rapport au levier, on voit que les roues extrêmes F et H se meuvent dans des sens opposés, par suite ε est négatif et égal à :

$$-\frac{F}{H} = -1.$$

Par suite :

$$\frac{a}{p} = \frac{1}{2}(\mu + \nu) = \frac{1}{2}\left(\frac{DE}{de} + \frac{LK}{lk}\right).$$

Si donc le rapport $\frac{a}{p}$ est donné, que son numérateur ou son dénominateur, ou tous les deux ne soient pas décomposables en facteurs premiers, il devient facile de déterminer deux fractions décomposables dont la somme soit égale à la fraction proposée, et de les employer pour former un système semblable à celui de la figure.

Cet emploi des systèmes épicycloïdaux est donné par M. Francœur (*Dictionnaire technologique*, t. XIV, p. 431), auquel nous empruntons le calcul ci-après. Il attribue ce mécanisme à MM. Pecqueur et Perrelet, qui l'ont employé en 1823; la première idée de ces méthodes, suivant M. Willis, est due à Mudge, qui a construit, vers 1767, une horloge qui donnait le mouvement lunaire par trains épicycloïdaux.

Appliquons ces résultats aux cas pour lesquels le système simple de roues dentées ne suffit plus, ce qui a lieu quand $\frac{T_m}{T_i} = \alpha$, α n'est plus un nombre commensurable et que les deux termes ne peuvent se décomposer en nombres premiers.

632. *Premier cas.* Soit $\frac{a}{p}$ une fraction dont le dénominateur est décomposable en facteurs premiers, mais non le numérateur.

Soit le dénominateur $p = f g h$, la fraction qui représente le rapport des vitesses est $\frac{a}{f g h}$. Le dénominateur pouvant souvent se décomposer en trois facteurs de diverses manières, chacun fournit une solution distincte du problème.

On décomposera $\frac{a}{f g h}$ en deux fractions convenables en posant :

$$\frac{a}{f g h} = \frac{f x}{f g h} + \frac{g y}{f g h},$$

c'est-à-dire $a = f x + g y$.

Il est facile de résoudre cette équation en nombres entiers pour x et y, et d'obtenir une infinité de valeurs de x et y qui satisfont au problème et donnent :

$$\frac{a}{f g h} = \frac{x}{g h} + \frac{y}{f h},$$

f et g devant être premiers l'un et l'autre, puisque a est premier par hypothèse.

Soit, par exemple, la fraction $\frac{271}{216}$. Puisque $216 = 4 \times 9 \times 6$, nous poserons $271 = 9x + 4y$ ou $f = 9$, $g = 4$. Les méthodes ordinaires de l'analyse indéterminée donnent pour toutes les valeurs qui satisfont à ces équations les deux expressions $x = 31 - 4t$, $y = 9t - 2$, t étant tout nombre entier positif ou négatif.

On a ainsi : $x = 27, 23, 19 \ldots 31, 35, 39$

$y = 7, 16, 25 \ldots -2 -11 -20$

pour les valeurs de t, $1 \quad 2 \quad 3 \ldots -0 - 1 - 2$

Comme $g h = 24$, $f h = 54$, la fraction $\frac{271}{216}$ est donc égale à :

$$\frac{27}{24} + \frac{7}{54}, \frac{23}{24} + \frac{16}{54}, \frac{19}{24} + \frac{25}{54},$$

ou encore à :

$$\frac{31}{24} - \frac{2}{54}, \frac{35}{24} - \frac{11}{54}, \frac{39}{24} - \frac{20}{54},$$

et ainsi de suite.

La première série se rapportant au cas où les roues tournent dans la même direction ; la seconde, quand les sens de rotation sont différents.

Puisque 8 et 3 n'ont pas de facteur premier, le dénominateur 216 peut être décomposé en $8 \times 3 \times 9$, et en posant $27\,1 = 8x + 3y$, on a :

$$x = 3t - 1 \qquad y = 93 - 8t,$$

d'où $x = 2,\ 5,\ 8\ .\ -1\ -4\ -7$

$$y = 85, 77, 69\ .\ .\ 93, 101, 109,$$

ce qui fournit les nouvelles décompositions :

$$\frac{2}{27} + \frac{85}{72}, \frac{5}{27} + \frac{77}{72}, \frac{8}{27} + \frac{69}{72}, \frac{93}{72} - \frac{1}{27} \ldots\ldots$$

et ainsi de suite pour d'autres solutions.

En général, le dénominateur de la fraction proposée pouvant être décomposé en facteurs premiers et mis sous la forme $m^{\alpha} n^{\beta} p^{\gamma} \ldots$, chaque paire de ces diviseurs peut être prise pour les quantités f et g, pourvu qu'ils soient premiers l'un par rapport à l'autre. Si alors on résout l'équation $a = fx + gy$ en nombres entiers, on a les valeurs des fractions composantes $\frac{x}{gh} + \frac{y}{fh}$, dans lesquelles h est le produit du reste des facteurs du dénominateur après qu'on a retiré f et g.

Exemple. — La lunaison moyenne $= 29^{j}\,12^{h}\,44'\,3'' = 2551443''$, par suite le rapport de la lunaison à 12 heures est $= \frac{850481}{14400}$ dont le numérateur est premier.

D'après la méthode ci-dessus, cette fraction peut se résoudre en deux, savoir:

$$\frac{850481}{14400} = \frac{40 \times 50}{6 \times 6} + \frac{71 \times 79}{50 \times 32}.$$

Si ces fractions sont employées pour les rouages μ et ν, les axes Aa, Bb feront leur révolution dans le rapport voulu.

$$\text{Pour } \frac{a}{p} = \frac{1}{2}(\mu+\nu) = \frac{1}{2}\left(\frac{80\times 50}{6\times 6} + \frac{71\times 79}{25\times 32}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{DE}{de} + \frac{LK}{lke}\right),$$

on aura les rapports ci-dessus, et les périodes seront inverses des rotations. Ainsi la période de 12 heures étant donnée par une horloge à l'axe Bb, la période de Aa sera exactement celle d'une lunaison. Le mécanisme sera représenté par le tableau suivant.

AXES.	ROUAGES.	PÉRIODES.
Premier axe	79—80.	lunaison.
Cheville supérieure. .	. . 6—50	
Canon supérieur. . .	. . . . . 6— Roue à couronne F	
Cheville inférieure. .	32—71	
Canon inférieur. . . .	. . . .25 —— Roue à couronne H	
Axe porte-rouage. . .	—————— Roue épicyclique G	12 heures.

Si la fraction primitive se résolvait en une différence au lieu d'une somme, comme dans l'exemple précédent $\frac{271}{216} = \frac{35}{24} - \frac{11}{54}$, elle pourrait de même être obtenue par le même mécanisme, en donnant aux rouages μ et à ν des signes différents, en faisant que les roues extrêmes tournent en sens différents.

Deuxième exemple. — Le temps moyen est au temps sidéral comme 8424 : 8401.

$$\text{Or} \qquad \frac{8401}{8424} = \frac{31\times 271}{39\times 216} = \frac{31}{39}\times\left\{\frac{19}{24} + \frac{25}{54}\right\}$$

$$\frac{a}{p} = \frac{1}{2}(\mu+\nu) = \frac{19}{24} + \frac{25}{54} \text{ ou } \mu = \frac{19}{12} \text{ et } \nu = \frac{25}{27}$$

donnent le rouage voulu, qui diffère de celui représenté figure 535 en ce que les roues E et K doivent être fixées sur un même axe qui porte une roue de 39 dents engrenant avec une

roue de 31 fixée sur Aa, comme on le voit sur le tableau suivant :

AXES.	ROUAGES.			PÉRIODES.
Premier axe. . .	31			temps sidéral.
Second axe . . .	39 — 19 — 25			
Canon supérieur.	27	Roue à couronne	F	
Canon inférieur.	12	Roue à couronne	H	
Axeporte rouage.		Roue épicyclique	G	temps solaire.

633. *Second cas.* — On suppose dans ce cas que le numérateur et le dénominateur sont tous deux premiers.

Formons deux fractions $\frac{a}{A}$ et $\frac{a_1}{A}$, a, a_1 étant le numérateur et le dénominateur de la fraction proposée et A une quantité arbitraire commodément décomposable en facteurs, et obtenons pour chacune de ces fractions des sommes ou des différences de deux fractions qui leur soient égales, comme nous avons fait ci-dessus.

Soit un axe Aa, comme fig. 535, réuni à un autre Bb par des roues dentées et un système épicycloïdal comme celui représenté sur la figure, et soit en outre un autre axe Cc disposé pour porter un système semblable. Les rotations simultanées des axes Aa, Bb, Cc seront A et a, a_1 ; μ, ν seront les raisons des trains réunissant Aa avec Bb, et μ_1, ν_1 celles des trains réunissant Aa avec Cc.

On aura donc : $\frac{a}{A} = \frac{\mu + \nu}{2}$ et $\frac{a_1}{A} = \frac{\mu_1 + \nu_1}{2}$ et $\frac{a}{a_1} = \frac{\mu + \nu}{\mu_1 + \nu_1}$ pour rapport des rotations simultanées de Bb et Cc.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de faire faire à un axe 17321 tours quand un autre en fait 11743; les deux nombres étant premiers, la fraction $\frac{17321}{11743}$ est irréductible et indécomposable en facteurs premiers.

Prenons un diviseur $5040 = 7 \times 8 \times 9 \times 10$, et formons deux rouages dont les vitesses soient représentées par $\frac{17321}{5040}$ et $\frac{11743}{5040}$.

Pour la première, on obtient par la méthode précédente :

$$\frac{17321}{5040} = \frac{1480}{630} + \frac{783}{720} = \frac{148}{63} + \frac{87}{80},$$

d'où les rouages $\frac{296}{63}$ et $\frac{87}{40}$.

Pour le second rouage, on aura de même :

$$\frac{11743}{5040} = \frac{830}{633} + \frac{729}{720} = \frac{83}{63} + \frac{81}{80},$$

d'où les rouages $\frac{166}{63}$ et $\frac{81}{40}$. Le problème sera complétement résolu par le mécanisme indiqué dans le tableau ci-après.

ROTATIONS SIMULTANÉES.	5,040	11,743	17,321
AXES.	NOMBRE DE DENTS DES ROUES MONTÉES SUR CHAQUE AXE.		
Axe A *a*	87 — 74 — 9 — 6	. . . . . *f*	
	9 — 83	. . . . . *h*	
	8 — 36	. . . . . *g*	
	21 Roue. . . F		
	20 — Roue. . . H		
Axe B *d*	— Roue épicycloïdale. G		
	6 — 24		
	63 — Roue		
	40 — Roue		
Axe C *c*	— Roue épicycloïdale. . *g*		

TROISIÈME CLASSE DE ROUAGES ÉPICYCLOIDAUX.

634. Nous avonsdit que cette troisième application avait pour objet de produire un mouvement accéléré ou retardé. Les emplois les plus fréquents de cette application sont ceux que l'on en fait aux divers compteurs, et surtout la disposition bien connue dans les bancs à broches à mouvement différentiel.

Nous allons d'abord décrire la disposition adoptée dans ce cas, d'après M. E. Saladin, de Mulhouse.

Transmission à deux vitesses. — Le mouvement est imprimé à un axe (fig. 536 et 537) par une courroie *c* passant sur une pou-

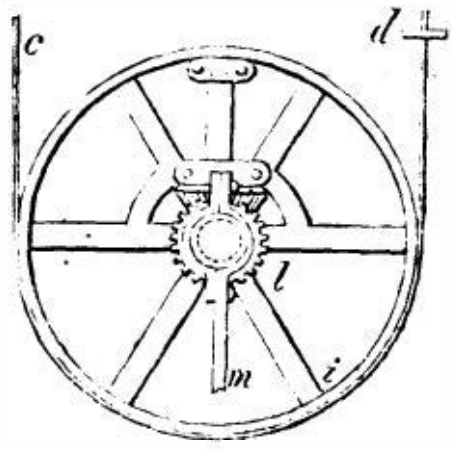


Fig. 536.

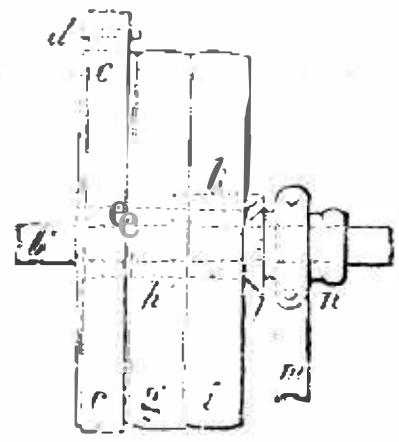


Fig. 537.

lie folle montée sur l'arbre moteur ; *d* guide de la courroie ; *g* poulie fixée sur l'arbre ; *h* roue d'angle fixée sur la douille de cette poulie; *i* poulie folle de même diamètre que les deux premières, servant à la double vitesse ; *k* deuxième roue d'angle portée transversalement par la poulie *i*, engrenant avec la première *h* ; *l* troisième roue d'angle à douille de même nombre de dents que la première *h*, engrenant avec la seconde *k*, et montée librement sur l'arbre *b'* ; *m* frein pouvant être serré sur la douille de la roue d'angle *l*, et pouvant la rendre fixe.

Lorsque la courroie *c* passe de la poulie folle sur la poulie fixe *g*, elle transmet à cettedernière la vitesse qu'elle reçoit du tambour moteur; mais lorsqu'elle commande la poulie *i*, l'arbre peut tourner avec une vitesse double.

En effet, le système devient alors tout à fait semblable à celui de la figure 481, pour lequel nous avons trouvé $n = 2a$, lorsque la roue l devient immobile. Si on fait abstraction de la roue l, et qu'on suppose pour un instant la poulie i assemblée sur l'arbre, les poulies g, i tourneront ensemble d'une même vitesse, et les deux roues d'engrenage tourneront avec elles sans agir. Mais lorsque, par l'action du frein, la roue l cesse de tourner avec l'axe, la vitesse de la circonférence de la poulie restant constante, la roue k tournes et elle est ici la roue supportée par le levier dans le train épicycloïdal, dont la première roue l est fixe.

Si, au lieu d'être immobile, la roue l avait une vitesse angulaire v, la vitesse de l'arbre deviendrait $v \pm 2v'$ (v' étant la vitesse angulaire de l'arbre communiquée par la courroie), suivant que le mouvement initial de la roue l serait en sens contraire ou dans le même sens que celui imprimé par la courroie. C'est ce que donne la formule (2) de l'article 605 $n = a + (m - a)\varepsilon$, dans laquelle on fait $\varepsilon = -1$, d'où $n = -m + 2a$.

Il faut observer que, lorsque la double vitesse commence, le frein doit laisser glisser un peu la roue l, lorsque l'effort est trop grand, dans le but d'éviter le changement instantané de vitesse et les ruptures qui pourraient en résulter.

635. *Second exemple.* — *Compteurs.* — Voyons maintenant l'emploi des rouages épicycloïdaux pour produire un mouvement très-lent.

Reportons-nous à la formule $\frac{a}{p} = \frac{\mu\varepsilon - \nu}{\varepsilon - 1}$, dans laquelle tous les termes sont considérés comme positifs. Si, au contraire, ε est négatif, μ et ν de signes différents, la formule devient: $\frac{a}{p} = \frac{\mu\varepsilon - \nu}{\varepsilon + 1}$, dans laquelle, en choisissant convenablement les systèmes de roues, a peut être très-petit par rapport à p, et par suite le rayon tourner très-lentement.

Si on suppose l'arrangement de la figure 483 :

$$\frac{a}{p} = \frac{aceg - hbdf}{bg(ce + df)},$$

dans cette expression, les deux termes du numérateur, n'ayant pas de commun diviseur, peuvent être pris différents d'une unité seulement, ce qui produit un rapport excessivement petit.

Par exemple, posons a, c, e, g égaux chacun à 83, $b = 106$, $d = 84$, $f = 65$, $h = 82$, on a :

$$\frac{a}{p} = \frac{83^4 - 82 \times 106 \times 84 \times 65}{106 \times 83\,(83^2 + 84 \times 65)} = \frac{1}{108646502}.$$

Si dans cette machine on supprime les roues h et e, en faisant agir a sur b et g, et d sur f et c, on a :

$$\frac{a}{p} = \frac{a}{bg} \times \frac{cg - bf}{c + f} = \frac{20}{100 \times 99} \times \frac{101 \times 99 - 100^2}{101 + 100} = \frac{1}{99495}.$$

636. Si au contraire on veut faire tourner l'axe moteur, dont les révolutions sont égales à p, lentement par rapport au rayon, alors le numérateur de la fraction $\frac{a}{p}$ doit être une somme et le dénominateur une différence voisine d'une unité, c'est-à-dire que ε doit être positif dans l'expression $\frac{a}{p} = \frac{\mu\varepsilon - \nu}{\varepsilon - 1}$ et très-voisin de l'unité, μ et ν avoir des signes différents.

La figure 538 représente une combinaison qui répond à cette disposition. mp est un axe fixe autour duquel tourne un long tube dont l'extrémité inférieure porte la roue D et l'extrémité supérieure la roue E. Un tube plus court tourne en outre autour du premier, et porte à ses extrémités les roues A et H. La roue C engrène à la fois avec les roues D et A, et le levier mn, qui tourne librement autour de mp, porte sur un axe n les roues réunies F et G. Dans le train épicycloïdal, composé des roues E, F, G et H, ε est évidemment positif, les roues extrêmes E, H tournant dans la même direction, H étant la première roue du train épicycloïdal, et on an $\varepsilon = \frac{HF}{GE}$.

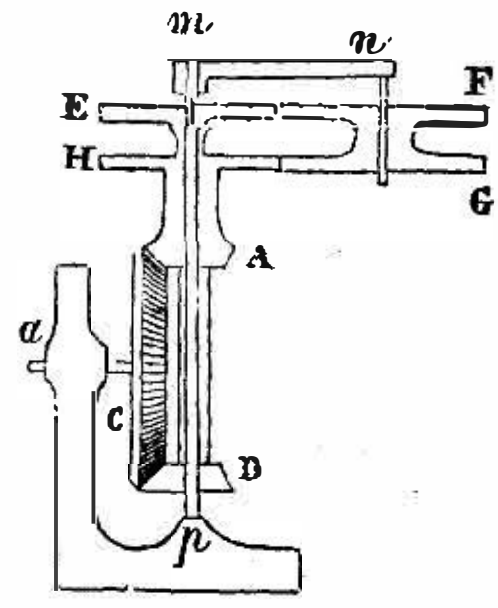


Fig. 538.

D'ailleurs, $\mu = \frac{C}{A}$ et $\nu = \frac{C}{D}$, et ont des signes différents, puisque A et D tournent dans des sens différents, donc :

$$\frac{a}{p} = \frac{\frac{C}{A}\cdot\frac{HF}{GE} + \frac{C}{D}}{\frac{HF}{GE} - 1}.$$

Si, par exemple, A = 10, C = 100, D = 10, E = 61, F = 49, G = 41, H = 51, on aura $\frac{a}{p} = 25000$, c'est-à-dire qu'il se produira 25000 rotations du levier *mn* pour un tour de la roue C.

637. Généralement la première roue du train épicycloïdal est fixe ; dans ce cas, la formule qui convient est $\frac{n}{a} = 1 - \varepsilon$.

Si ε est positif et très-voisin de l'unité, cette valeur sera très-petite et *n* petit par rapport à *a*, c'est-à-dire que le mouvement de la dernière roue du train est lent par rapport à celui du levier.

Des formes simples des trains épicycloïdaux des figures 479, 480 et 481, les deux dernières ne sont pas propres à réaliser ce système, parce que ε est négatif, mais la disposition de la figure 479 peut être employée ; A étant fixe et $\frac{n}{a} = 1 - \frac{AE}{bD}$; pour avoir le plus petit mouvement possible, il faut poser :

$$AE - bD = \pm 1.$$

Soit $\varepsilon = \frac{101 \times 99}{100 \times 100}$, on aura $\frac{n}{a} = \frac{1}{10000}$; mais d'aussi grands nombres de dents ne sont pas convenables pour les roues entraînées par le rayon porte-roues.

Soit $\varepsilon = \frac{111 \times 9}{100 \times 10}$, $\frac{n}{a} = \frac{1}{1000}$, ou $\varepsilon = \frac{31 \times 129}{32 \times 125}$, $\frac{n}{a} = \frac{1}{4000}$.

Ces combinaisons sont quelquefois employées dans des compteurs comme avec celle indiquée article 296. Les roues A et D (fig. 479) étant à très-peu près de même contour, les pignons *b*

et E entraînés par le rayon peuvent avoir un même nombre de dents, ou, en d'autres termes, un pignon épais être substitué à celles-ci et engrener avec la roue fixe A et la roue D qui se meut lentement.

Soit M, M — 1 et K les nombres de dents de D, A et du pignon épais respectivement ; alors

$$\frac{a}{n} = 1 - \frac{K\,(M-1)}{KM} = \frac{1}{M},$$

M étant le nombre de dents de la roue qui se meut lentement.

QUATRIÈME CLASSE DE SYSTÈMES ÉPICYCLOÏDAUX.

638. Cette dernière application se rapporte aux systèmes qui ont pour but de concentrer les effets de deux ou d'un plus grand nombre de systèmes de rotation soumis à des lois de vitesses quelconques, pouvant être représentées par une courbe excentrique sur une pièce unique, et d'obtenir ainsi des variations de vitesse suivant une loi donnée.

Comme exemple de cette application, nous prendrons l'équation des horloges, curieux problème dont la solution occupe une place importante dans l'histoire de l'invention des mécanismes, et a été l'objet de nombreux travaux depuis une époque reculée jusqu'à nos jours. Le but à atteindre est de faire marquer aux aiguilles d'une horloge non-seulement l'heure, mais aussi le temps vrai. Pour cela, on agit comme les astronomes pour le mouvement du soleil, c'est-à-dire qu'on divise ce mouvement en deux mouvements élémentaires, l'un uniforme qui correspond au temps moyen, et l'autre qui correspond à la différence du temps moyen et du temps vrai ou à l'équation du temps. On réunit deux mécanismes, l'un celui d'une horloge ordinaire, et l'autre disposé de manière à communiquer un mouvement lent correspondant à l'équation du temps, et on concentre les effets des trains séparés sur une seule aiguille à l'aide d'un rouage épicycloïdal. Il y a trois arrangements possibles :

Le mouvement de l'équation peut être communiqué à une

extrémité du système et le mouvement moyen à l'autre; le rayon possédera alors le mouvement solaire (Lebon proposait un système semblable en 1722).

Le mouvement de l'équation peut être communiqué à une extrémité du système, et le mouvement moyen au rayon; l'autre extrémité du train donnera le mouvement solaire.

Enfin, le mouvement de l'équation peut être communiqué au rayon, le temps moyen à une extrémité du train; l'autre extrémité recevra le mouvement solaire (c'est le système des horloges de Du Tertre, 1742, et d'Enderlin). Nous allons décrire cette dernière disposition.

639. La figure 539 permet de voir la disposition des roues dentées et de l'équation qui communiquent le mouvement aux aiguilles.

G est le centre du mouvement du système épicycloïdal, G D*e* la pièce correspondant au rayon ou levier sur laquelle sont montés les axes qui peuvent se mouvoir. Les roues *f* et C tournent librement autour de l'axe G, et l'axe D est entraîné par le levier, ainsi que les deux roues *c*, D, qui tournent avec lui

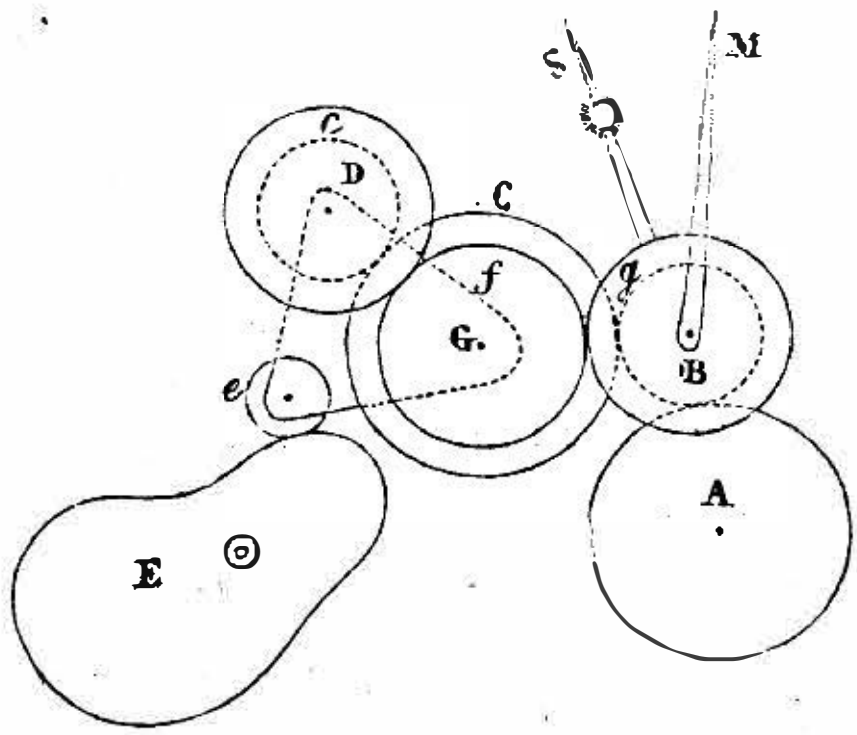


Fig. 539.

et qui engrènent respectivement avec *f* et C. Le rouage épicycloïdal consiste donc en quatre roues C, *c*, D, *f*, et C est la première roue. Maintenant si on suppose la roue C menée par la roue B, dont le mouvement dérive de celui de la roue A faisant partie

d'une horloge ordinaire, et l'aiguille des minutes montée sur l'axe de B, indiquant le temps moyen à la manière ordinaire; le mouvement de l'équation est communiqué à la pièce G D *e* comme il suit :

E est un excentrique dont la révolution s'accomplit en une année. Un rouleau de frottement adapté au levier repose sur le contour de cet excentrique, et est maintenu en contact par un poids ou un ressort. La forme de l'excentrique a été déterminée de manière à faire prendre au levier un mouvement angulaire convenable.

La première roue du système recevant le mouvement moyen, l'autre extrémité engrène avec une roue *g* concentrique avec la roue à minutes M et tourne librement autour de son axe; l'aiguille solaire S est fixée au tube qui porte cette roue et reçoit la combinaison du mouvement moyen et de l'équation.

La formule applicable à ce cas est $n = a(1 - \varepsilon) + m\varepsilon$, dans laquelle ε est positif et égal à $\frac{\mathrm{C}c}{\mathrm{D}f}$. Si nous désignons les rotations simultanées de l'aiguille des minutes M et de C par M et m respectivement, on a : $m = \mathrm{M}\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}$, et celles de f et g par n et s, on a : $n = s\frac{g}{f}$, substituant ces valeurs dans la formule ci-dessus :

$$s = a\frac{\mathrm{D}f - \mathrm{C}c}{\mathrm{D}g} + \mathrm{M}\frac{\mathrm{B}c}{\mathrm{D}g},$$

dont la première partie se rapporte à l'équation et la deuxième au mouvement moyen.

Mais le mouvement moyen de S étant le même que celui de M, on doit donc avoir $\frac{\mathrm{B}c}{\mathrm{D}g} = 1$, et pour la partie du mouvement de S due à l'équation, l'expression $a\frac{\mathrm{D}f - \mathrm{C}c}{\mathrm{D}g}$ montre le rapport qui doit exister entre la vitesse angulaire du levier portant les axes et celle de l'aiguille.

Si le levier se meut avec la même vitesse angulaire que l'ai-

guille, alors $\frac{Df - Cc}{Dg} = 1$, ce que l'on peut obtenir en faisant $f = c = g$ et $C = 2D$; d'ailleurs puisque $Bc = Dg$, si $c = g$, on a $B = D$; ce sont les proportions employées par Enderlin.

Si on veut que le levier se meuve d'un angle plus petit que l'aiguille, moitié par exemple, il faut alors poser $C = 3D$, et ainsi de suite.

IV. MOUVEMENTS ALTERNATIFS EN MOUVEMENTS ALTERNATIFS.

Dans ce qui précède, nous nous sommes occupé des organes de transformation de mouvement qui correspondent aux mouvements circulaires et rectilignes. Nous avons ainsi étudié les roues dentées, les plans inclinés, les cordes, qui servent généralement pour les mouvements continus, mais aussi dans beaucoup de cas pour des transformations de mouvements alternatifs; il nous reste à étudier, au point de vue du mouvement des guides, les leviers et les bielles, éléments principaux de transformation des mouvements alternatifs.

640. *Mouvement rectiligne en rectiligne.*—Soit une longue bielle A B C (fig. 540), B un de ses points, son milieu par exemple,

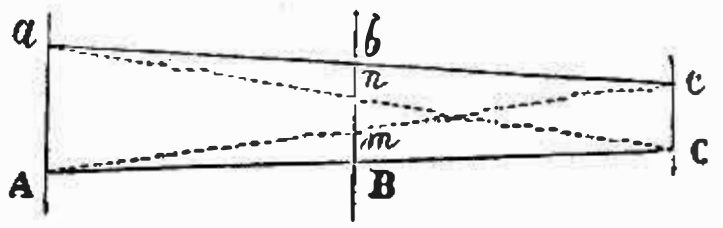


Fig. 540.

je suppose qu'un petit mouvement Aa, perpendiculaire à sa longueur, soit communiqué à son extrémité A, l'autre extrémité C restant en repos, le point B décrira sensiblement l'espace

$$Bn = \frac{Aa}{2}.$$

Si au contraire A restant en repos, on eût imprimé à C un petit mouvement Cc transversal à la barre, le point B aurait décrit sensiblement le chemin $Bm = \frac{Cc}{2}$.

Donc si les deux mouvements en question sont communiqués, soit simultanément, soit successivement, aux deux extrémités, le centre B parcourra le petit chemin $B\,b = \frac{A\,a + C\,c}{2}$, ou si ces deux mouvements imprimés étaient de sens contraire, de manière à amener la bielle de la position A *c* à *a* C, le milieu de la bielle décrirait le petit chemin $m\,n = \frac{A\,a - C\,c}{2}$.

Il est clair qu'on suppose ici la barre assez longue pour que C *c*, A *a*, B *b* puissent être considérés tous trois comme perpendiculaires à la bielle.

Donc si l'on communique deux mouvements virtuels ou élémentaires indépendants aux extrémités d'une bielle perpendiculairement à sa direction, son milieu décrit la moitié de leur somme ou de leur différence, suivant que ces mouvements sont de même sens ou de sens contraire.

Si ce sont les points A et B auxquels on fait décrire successivement de petits chemins, le point C décrit alors un chemin égal à celui que parcourt A, mais en sens contraire, et deux fois le chemin que parcourt B dans le même sens que ce dernier point.

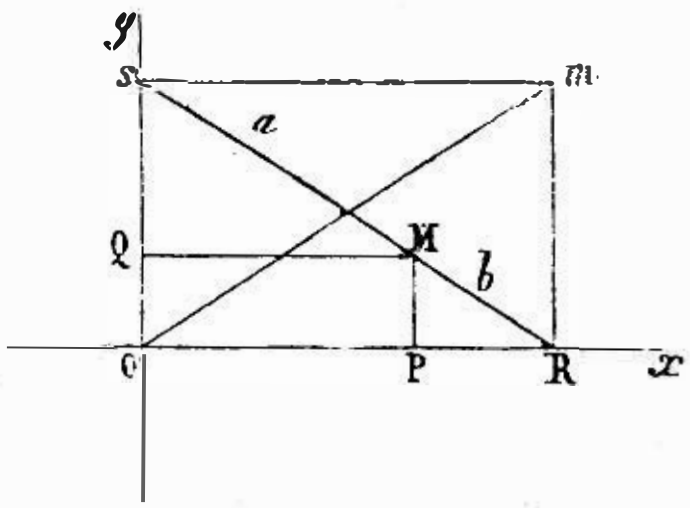


Fig. 541.

Dans ces déplacements élémentaires infiniment petits qui ne pourraient se continuer le long de A *a*, C *c*, sans que la barre A B C changeât de longueur, tout point de la bielle décrit un élément de ligne droite.

641. Lorsque les directions des deux mouvements rectilignes

ne sont pas parallèles, les déplacements simultanés des deux extrémités de la bielle font naître leur mouvement composé, et la courbe décrite par un point de cette bielle est une ellipse.

En effet, en nous bornant, pour le moment, au cas de deux guides rectangulaires, si M est un point de cette barre, abaissant de ce point sur les rainures prises pour axes de coordonnées les perpendiculaires $MP = y$, $MQ = x$, posant $MS = a$, $MR = b$, les deux triangles semblables MQS, MPR donneront les proportions $y : b = SQ : a$,

or $$SQ = \sqrt{a^2 - x^2},$$

d'où $$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

c'est-à-dire l'équation de l'ellipse dont a et b sont les deux axes.

Donc tout point d'une droite assujettie à glisser sur deux lignes droites par deux de ses points décrit une ellipse dont la somme ou la différence des demi-axes est celle de la longueur de la droite interceptée entre les deux directrices.

Cette ellipse se réduit à une droite pour les points R et S de la droite mobile, à chacune des rainures directrices.

642. Nous avons vu que le point m, centre instantané de rotation, est obtenu par la rencontre des deux perpendiculaires élevées sur les deux directrices à leur point de rencontre avec les extrémités de la droite mobile. La diagonale om étant égale à la droite mobile dont la longueur est invariable, le point reste donc une circonférence de cercle ayant le point de concours des deux directrices pour centre, et la longueur de la droite mobile pour rayon.

Le point de rencontre n des deux diagonales restant à une distance on constante du point o, se meut également sur une circonférence, d'où il résulte que si, pour une position donnée, on assujettit ce point n de la droite mobile à se mouvoir sur une circonférence, le mouvement de la droite mobile ne sera nullement modifié si l'on supprime une des directrices rectilignes.

643. Cette disposition a été employée pour obtenir un guide de mouvement rectiligne, et conduit à un système fort ingé-

nieux, mais malheureusement assez défectueux sous quelques rapports; c'est le parallélogramme d'Olivier Évans (fig. 542).

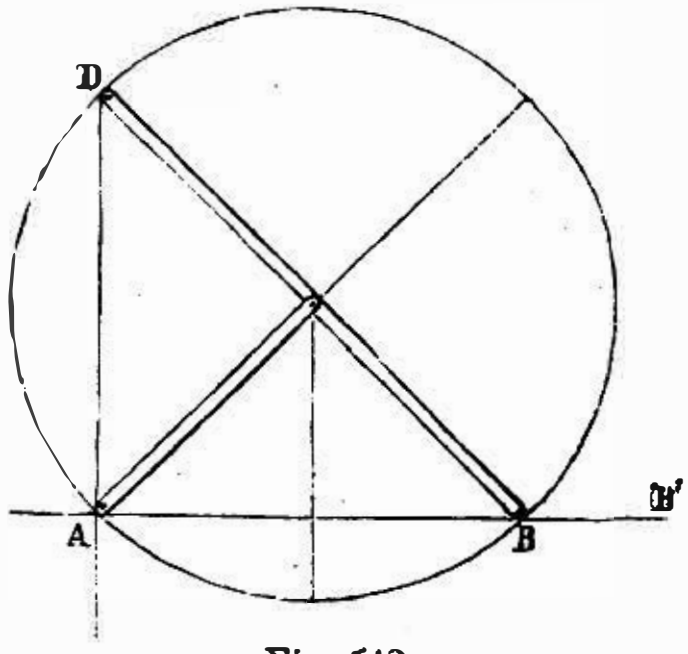


Fig. 542.

Soit B D une barre assemblée à l'extrémité D avec une tige A D qui doit se mouvoir en ligne droite, et dont l'extrémité B peut se mouvoir horizontalement sur la ligne A B'.

Une barre A C', dont la longueur est égale à la moitié de B D, peut tourner autour d'un point fixe A et est assemblée à charnière avec le milieu C' de B D. Cette ligne, prolongée d'une longueur égale à A' *c*, passerait au point *m*, et le maintiendrait sur la circonférence indiquée.

D'après ce qui précède, on voit que *le point* D *ne peut se déplacer que suivant* D A.

On peut vérifier *a posteriori* l'exactitude de cette construction. En effet les trois points D, A, B, étant situés à égale distance du point C', appartiennent toujours à une circonférence décrite du point C' comme centre sur B D comme diamètre. Les deux points B et D étant les extrémités d'un même diamètre, l'angle inscrit D A B est droit, et le point D, se trouvant constamment sur la perpendiculaire A D élevée sur la ligne fixe A B, se meut en ligne droite.

On voit donc que, B D étant un balancier, le point D se meut en ligne droite s'il est porté par une tige articulée autour d'un point fixe A, et si les coussinets de l'axe placé en B sont assujettis à se mouvoir dans une glissière. Comme le mouvement rectiligne du point B est peu étendu dans le cas des machines à

vapeur, on le remplace par un petit arc de cercle décrit par un support qui porte les coussinets de B, et qui oscille autour d'une articulation placée à sa partie inférieure.

644. *Vitesses.* — Le rapport des vitesses est celui fourni par l'expression générale, qui se simplifie, l'angle des directrices étant droit. Elle devient :

$$\frac{\text{Vitesse de D}}{\text{Vitesse de B}} = \frac{V}{V'} = \frac{\cos.\ \alpha}{\cos.\ \beta} = \text{tang. } \beta.$$

645. Les théorèmes établis précédemment sont généraux, quel que soit l'angle formé par les deux directrices prises pour axes des coordonnées.

Ainsi un point M de la droite mobile R S (fig. 543) décrira encore une ellipse, lorsque les coordonnées feront un angle différent d'un angle droit. En effet, en menant par ce point deux parallèles aux axes, on aura :

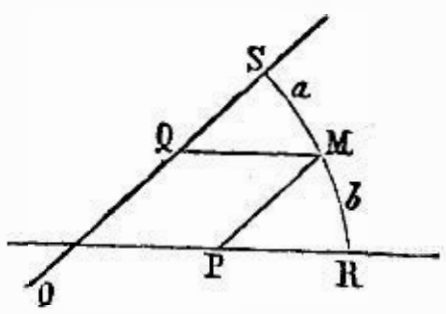


Fig. 543.

$$y : b = \text{OS} : l \text{ ou } \text{OS} = \frac{ly}{b}.$$

Dans le triangle SQM, on a :

$$a^2 = x^2 + \text{QS}^2 + 2\,\text{QS}\ x \cos.\ \theta.$$

Or $\text{OS} = y + \text{QS}$.

Substituant d'après la valeur trouvée pour OS, on a une équation du second degré en x et en y qui est celle d'une ellipse.

646. Le second théorème établi s'applique encore dans le cas où les directrices forment un angle quelconque θ, seulement le point qui décrit une circonférence n'est plus le milieu de la droite mobile, mais le centre du cercle passant par les deux points guidés de la droite et le point de concours des directrices, cercle dont la droite mobile était un diamètre dans le cas précédent.

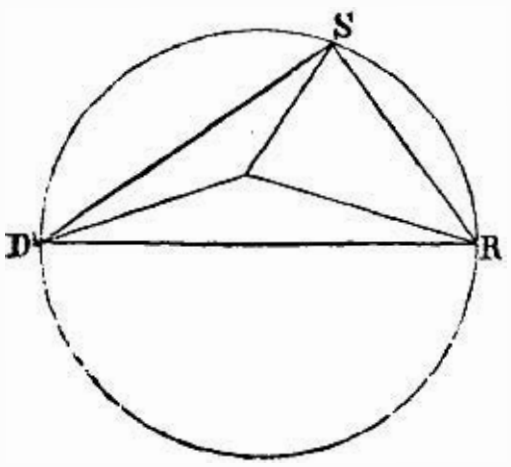


Fig. 544.

Joignons ce centre aux sommets du triangle inscrit DSR, $\alpha, 6, \gamma$ étant les angles des rayons avec chacun des côtés, la longueur constante l

de la droite S R sera égale à $2r$ cos. γ, et l'équation $l = 2r$ cos. γ prouve que r est constant si γ est constant.

Or pour une position quelconque on a toujours :

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2 \text{ droits},$$

les trois triangles élémentaires étant isocèles comme d'ailleurs $\alpha + \beta = 0$, cos. γ est donc bien constant, et aussi la valeur de r.

Donc en général il existe toujours un point dans le plan qui, supposé lié à la droite et entrainé par elle, décrit une circonférence, et en obligeant ce point à rester sur une circonférence, on peut supprimer une des directrices rectilignes.

647. Un système curieux, dit *zigzag*, permet de transformer, par une combinaison de leviers, un double mouvement circulaire alternatif en un mouvement rectiligne.

Ce système consiste dans la répétition de celui de la figure 416, représentant la transformation de circulaire alternatif en rectiligne alternatif à l'aide de la bielle et de la manivelle, si l'on change les bielles, en les prolongeant, en deux autres leviers oscillant autour d'un centre mis en mouvement par le premier système. On obtient ainsi la disposition de la figure 545, dans laquelle le point de rencontre des deux premiers leviers est le seul point nécessairement fixe.

Ce système se trouve donc nécessairement formé d'une réunion de parallélogrammes par l'articulation de barres parallèles deux à deux. Le transport différentiel se ferait également pour les longueurs quelconques, d'où varieraient dans chaque cas les directions et les vitesses, mais nous nous bornerons au cas le plus simple, qui seul se rencontre dans la pratique. Les divers centres des articulations, suivant la direction constante de la diagonale commune aux losanges successifs, se meuvent nécessairement sur une même ligne droite.

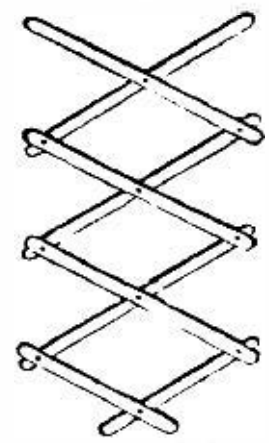


Fig. 545.

Il est facile d'évaluer le rapport des vitesses de transport rec-

tiligne à la dernière articulation avec le mouvement circulaire de l'extremité du levier dans cet appareil. Pour un seul losange, le système n'est que celui de la bielle, comme nous l'avons vu, c'est-à-dire que pour passer de l'angle ω à l'angle ω' du levier avec la diagonale commune, l étant la longueur entre deux articulations, r la longueur des leviers moteurs, le mouvement angulaire sera $r(\omega - \omega')$, et le mouvement rectiligne $l(\cos.\ \omega' - \cos.\ \omega)$.

$$\text{Or } \cos.\ \omega = 1 - \frac{\omega^2}{2} + \text{, etc.}$$

$$\text{Cos. } \omega' = 1 - \frac{\omega'^2}{2} + \text{, etc.,}$$

en se bornant à ces deux premiers termes, ce qui est permis pour apprécier la différence, surtout si $\omega - \omega'$ n'est pas très-grand, le rapport devient ;

$$\frac{l(\omega^2 - \omega'^2)}{r(\omega - \omega')} = \frac{l(\omega + \omega')}{r}.$$

Appelons a cette quantité, elle se répétera pour chaque parallélogramme qui sera transporté à mesure que s'accomplit la rotation, et s'il y en a n égaux entre eux, le chemin parcouru par le point extrême sera na.

Les deux limites du mouvement sont nl lorsque les bielles sont parallèles à la diagonale passant par l'articulation fixe et se touchent, et np, p étant l'épaisseur des barres, lorsqu'elles reposent les unes sur les autres. Le chemin total, qui pourra être parcouru par l'articulation extrême pour un mouvement angulaire des leviers moteurs de 0 à 90°, est donc $n(l - p)$, par suite très-grand relativement à celui πr des deux leviers, pour peu que n soit assez grand.

648. *Mouvement circulaire en circulaire.* — Une bielle dont les deux extrémités sont assemblées à deux rayons décrivant des arcs de cercle est le principal système à étudier ici, et le mouvement de la bielle dont la nature est celle des organes différentiels, puisque les guides de rotation aux deux extrémités sont entrainés par les deux manivelles, jouit de propriétés curieuses et utiles.

Courbe décrite. — A*a*, B*b* étant les deux bras ou rayons qui tournent autour des centres A et B, *ab* la bielle articulée à leurs extrémités mobiles; celle-ci prend diverses positions, et la figure 546 indique les principales.

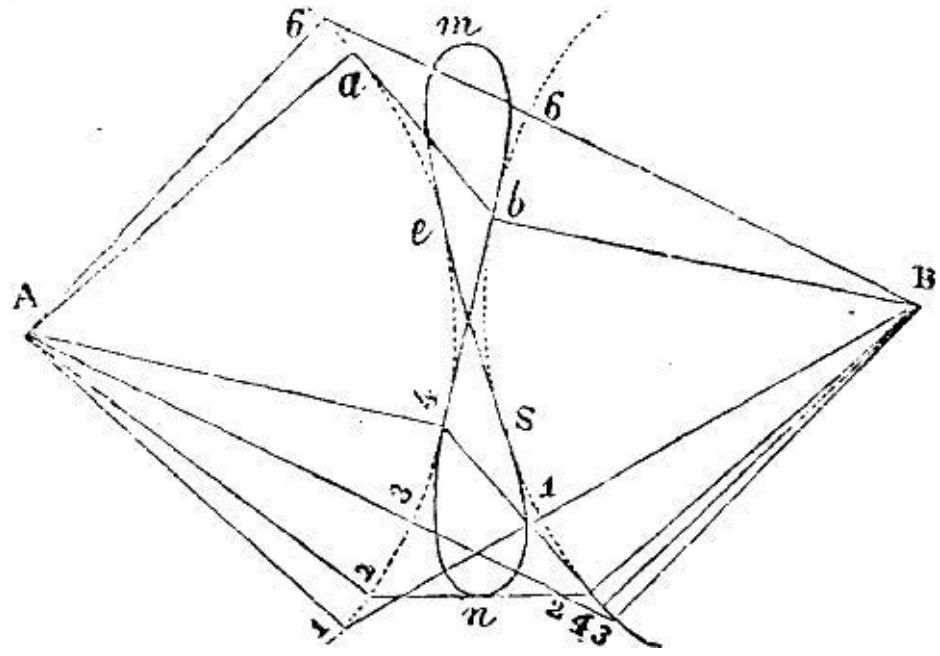


Fig. 546.

Un point *c* pris sur la bielle décrit la courbe en forme de 8, *men*, connue sous le nom de *courbe à longue inflexion*; inflexion dont la symétrie indique la position sur la ligne des centres. Cette courbe se confond très-sensiblement vers ce point du mouvement avec une droite, avec sa tangente.

649. Au reste non-seulement on pourra obtenir ainsi les points successifs de la courbe, mais encore la tangente à la courbe en chaque point, ce qui en limite rapidement la forme et les contours principaux. En effet, si on prolonge les rayons des deux cercles qui passent par les extrémités de la droite, on sait qu'ils se couperont en un point qui sera le centre instantané de rotation. Si donc on joint ce centre au point décrivant, une perpendiculaire à cette ligne donnera la tangente cherchée. On trouve ainsi facilement les deux tangentes au point d'inflexion pour la position des rayons passant par les extrémités de la bielle, parallèles entre eux.

650. Puisque tout est bien déterminé dans ce système, on peut, comme l'a fait M. de Prony, chercher l'équation de cette courbe rapportée à des axes rectangulaires. Bien que de peu de valeur dans la pratique, à cause de sa complication, elle n'est pas inu-

tile pour reconnaître la forme générale de la courbe. Il importe d'opérer les éliminations successives avec quelques précautions pour obtenir l'équation définitive sous la forme la plus simple possible.

Elle est, d'après M. Vincent, en appelant *a, b, c, d, ...,* les longueurs du parallélogramme et des lignes données: A, B, C..., des fonctions simples de ces longueursn

$$d^2y^6+(3d^2x^2+2Adx+B)\,y^4+(3d^2x^4+4Adx^3+2Cx^2 +2Dx+E)\,y^2+(dx^3+Ax^2+Fx+G)^2=0,$$

c'est-à-dire du sixième degré, et telle, comme le montre la discussion de l'équation, que sa forme se rapproche d'une sorte de *lemniscate* ou d'un chiffre 8.

Cette équation ne peut guère être utilisée pour calculer la quantité dont la courbe à inflexion s'écarte de sa tangente dans sa partie moyenne, ce qui est l'objet intéressant pour la pratique de ces recherches.

Avant d'insister sur ce point, ajoutons qu'on a cherché également, sans plus de profit, l'équation de la courbe dans le système des coordonnées polaires. On arrive pourtant à un curieux résultat; c'est que, lorsque deux circonférences égales se coupent à angle droit, une droite mobile qui s'appuie sur ces deux circonférences, d'une longueur égale à la distance des centres, décrit par son milieu une *lemniscate* de Jacques Bernouilly, $\rho^2=2\cos.2\omega$, dont les foyers sont les centres des circonférences.

D'où cette conséquence importante que faisait prévoir la similitude des formes, que la *lemniscate* est un cas particulier de la *courbe à longue inflexion.* (P. Carbonel.—*Académie de Belgique.*)

651. Le rapprochement de la courbe avec sa tangente dans la partie moyenne est le but spécialement utile de ces recherches qui expliquent l'effet de la disposition connue sous le nom de *parallélogramme de Watt,* qui doit ses propriétés à ce que, ses points décrivant des courbes à longue inflexion, leur mouvement dans la position moyenne a lieu sensiblement sur la tangente au point d'inflexion, qui, dans une grande longueur, s'écarte peu de la courbe.

La figure 547 montre l'emploi de cette disposition. Elle consiste à monter à l'extrémité d'un balancier un parallélogramme dont un angle est assujetti par un rayon à se mouvoir sur une

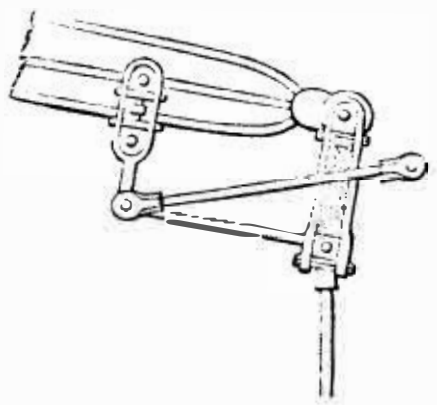


Fig. 547.

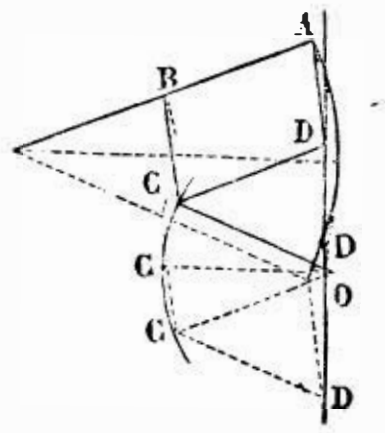


Fig. 548.

circonférence. Quant à la position du centre et à la longueur du rayon qui guide le parallélogramme, si la grandeur de celui-ci était donnée *a priori*, on la déterminerait en faisant passer une circonférence par les positions du sommet C du parallélogramme aux deux extrémités et au milieu de la course du piston (fig. 548), le point D restant en ligne droite. Le centre de ce cercle serait la position la plus convenable du point fixe.

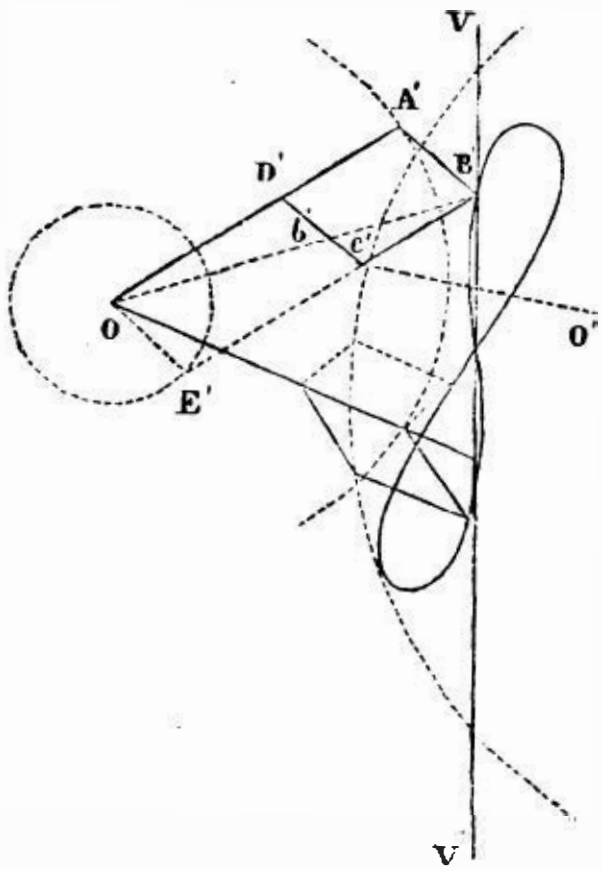


Fig. 549.

652. La courbe ainsi tracée est bien la *ligne décrite par un point d'une droite mobile de longueur constante, dont les extré-*

mités glissent sur deux circonférences fixes ; c'est bien celle tracée ci-dessus par un semblable mouvement.

En effet, si par le centre O du balancier (fig. 549) on mène une parallèle au côté D′ C′, du parallélogramme A′ B′ C′ D′, elle rencontrera le prolongement du côté B′ C′ en un point E′, et l'on aura O E′ = D′ C′ = constante, et de même E′ C′ = O D′ = constante. Donc la droite C′ E′, de longueur constante, se meut de manière que ses extrémités glissent sur deux circonférences ayant leurs centres en O centre du balancier, et en O′ centre du guide du parallélogramme, et pour rayons O′ E′, O′ C′. Un point B′ de la droite C′ E′ prolongée trace donc une courbe semblable à la courbe en question.

653. Ce qui importe pour la pratique, c'est l'évaluation des écartements de la courbe et de la verticale qu'un tracé permet toujours d'obtenir graphiquement. M. Willis a donné quelques méthodes de calcul approché convenables pour la pratique, que nous rapporterons ici.

Soient A, C, les centres de rotation des bras ou rayons A B, C D (fig. 550); B D la bielle articulée à leurs extrémités; admettons d'abord que cette bielle soit perpendiculaire aux deux

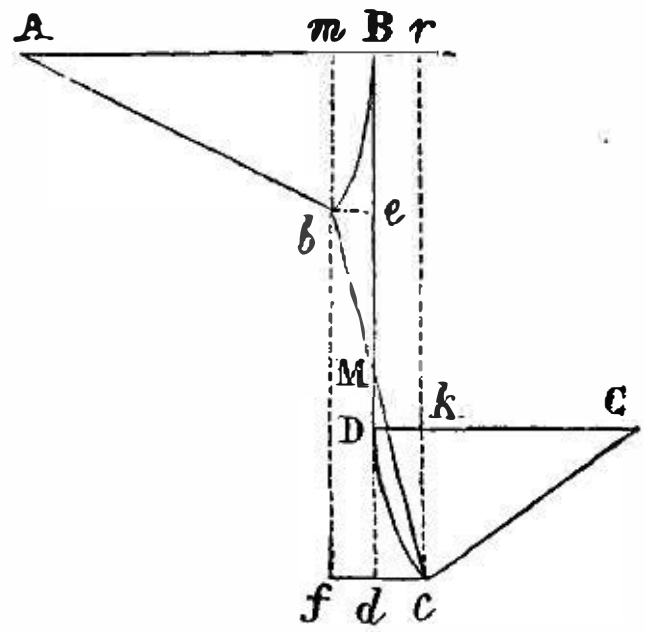


Fig. 550.

rayons dans la position médiane A B C D du système. Cherchons à déterminer le point où devra être attachée la tige pour un minimum de déviation.

Faisons mouvoir A B jusqu'à la position A*b*, C*c* et *bc* seront

les positions correspondantes de l'autre rayon et de la bielle. Menons bf parallèle à BD.

Dans la première position la bielle est perpendiculaire aux rayons; dans la seconde, elle prend une position oblique bc, telle que son extrémité supérieure est jetée à gauche et son extrémité inférieure est jetée à droite de la verticale BMd de quantités respectives be, dc, qui ne sont autre chose que les sinus-verses des arcs décrits pour les rayons. Il y a quelque part sur la bielle un point M situé sur la verticale BMd, tel que ces quantités soient égales; le lieu de ces points se déterminera en chaque instant par la proportion :

$$bM : Mc = be : dc,$$

faisant AB $= R$, CD $= r$, BD $= l$, BA$b = \theta$, DC$c = \varphi$ et $bM = x$, on a :

$$\frac{x}{l-x} = \frac{R \text{ sin. vers } \theta}{r \text{ sin. vers. } \varphi} = \frac{R \text{ sin.}^2 \frac{\theta}{2}}{r \text{ sin.}^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{r}{R} \times \frac{R^2 \text{ sin.}^2 \frac{\theta}{2}}{r^2 \text{ sin.}^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

L'angle BA$b = \theta$ ne dépassant jamais 20° dans la pratique, l'inclinaison cbf de la bielle est toujours assez petite et l'arc B$b = R\theta$ est à très-peu près égal à D$c = r\varphi$. Comme ces angles sont très-petits, les sinus diffèrent peu des angles, donc sans erreur sensible on pourra encore poser :

$$R \text{ sin. } \frac{\theta}{2} = r \text{ sin. } \frac{\varphi}{2},$$

$$\text{d'où } \frac{x}{l-x} = \frac{r}{R} \text{ et } x = \frac{lr}{R+r}.$$

Soit $R = 7$, $r = 4$, $l = 2$, on a : $x = \frac{8}{11} = 0{,}727$.

654. On avait admis jusque dans ces derniers temps que la disposition qui correspond à un minimum de déviation était celle représentée sur la figure 551. Les rayons sont de même longueur et admis pour simplifier égaux chacun à l'unité; Ab est la position angulaire extrême de AB, BA$b = \theta$; la distance horizontale AK des centres A et C est faite égale à AB + CD — sin. vers. θ.

Dans cette combinaison, les rayons étant supposés parallèles lors de leur première position A B, C D, la seule inspection de la figure montre que la bielle s'incline tantôt à droite, tantôt à

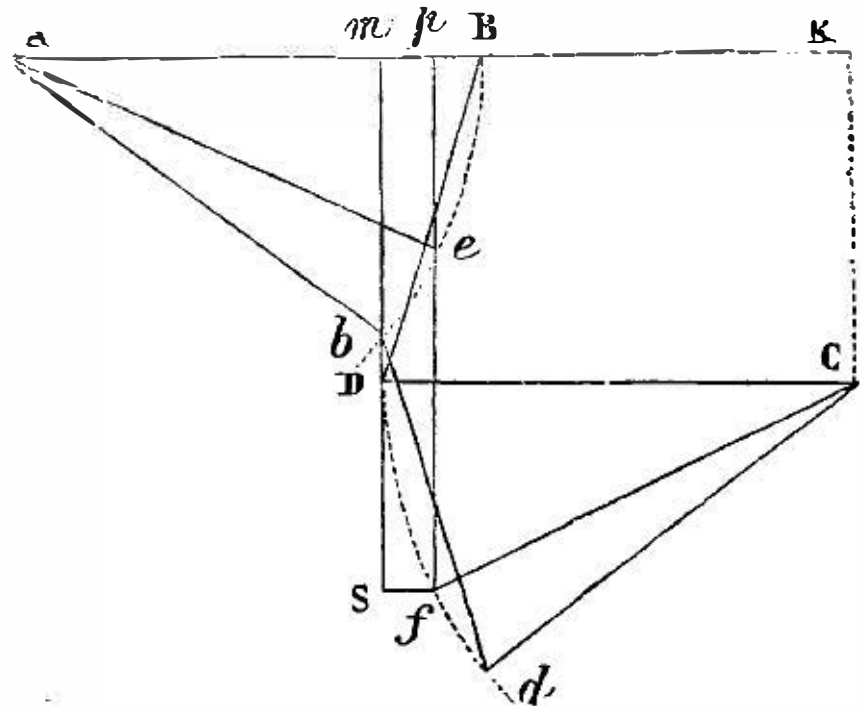


Fig. 551.

gauche de quantités presque égales, et, par conséquent, le milieu de cette bielle, lors de sa position inférieure bd, est sur la verticale qui passe par ce même milieu lors de sa position en B D.

L'inclinaison de la bielle variant sans cesse entre les positions extrêmes, son centre déviera de cette verticale pour des positions intermédiaires d'une quantité facile à calculer et qui sera maximum lorsque cette bielle sera elle-même verticale. Supposons que cela ait lieu lorsque le rayon A B fait au-dessous de l'horizontale un angle $A B e = \theta_1$, la bielle étant en ef, et soit :

$$D C f = \varphi_1, \; m D B = d b s = \gamma,$$

on a alors :

$$m D + D s \text{ ou } l \cos. \gamma + \sin. \varphi_1 = \sin. \theta_1 + l,$$

d'où $$\sin. \varphi_1 = \sin. \theta_1 + l (1 - \cos. \gamma) = \sin. \theta_1 + \frac{l \gamma^2}{2};$$

mais $$\gamma = \frac{B m}{l} = \frac{\text{sin. vers. } \theta}{l},$$

donc $$\sin. \varphi_1 = \sin. \theta_1 + \frac{(\text{sin. vers. } \theta)^2}{2 l},$$

et le calcul de la déviation du point milieu devient possible, est égal à (art. 640) :

$$= \frac{\cos. \varphi_1 - \cos. \theta_1}{2}.$$

La table suivante donne quelques valeurs des angles et des déviations correspondantes; on y suppose pour le calcul $l = \frac{1}{2}$ et sin. vers. $\theta = 2$ sin. vers. θ_1, ce qui est sensiblement vrai.

θ	θ_1	φ_1	DÉVIATION.
20°	14° 7′	14° 20′	0,00046
25°	17° 36′	18° 8′	0,00143
30°	21° 1′	22° 6′	0,00347
35°	24° 33′	26° 38′	0,00785

655. Le système le plus généralement employé, celui qu'on retrouve dans les grandes machines à vapeur, est celui d'un parallélogramme articulé représenté sur la figure 552, c'est sous cette forme qu'il a été combiné par Watt.

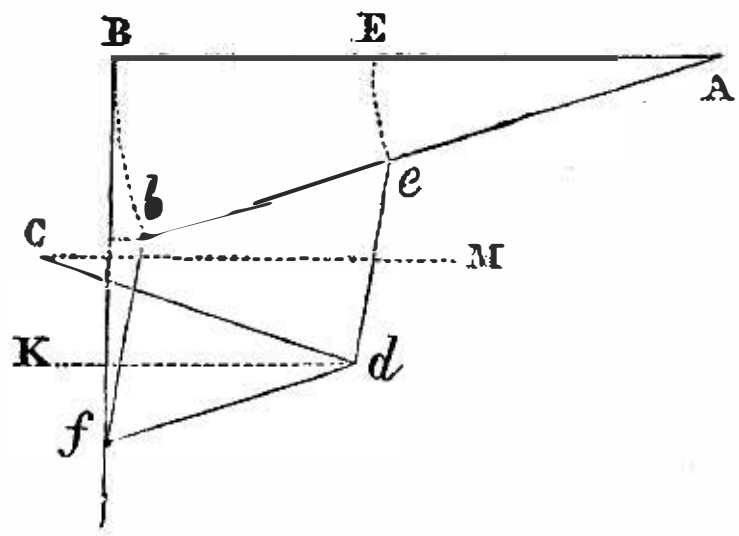


Fig. 552.

Le demi-balancier de la machine AB est lui-même un des rayons des systèmes précédents. Il porte de petites bielles $e\,d = b\,f$ et une troisième barre $d\,f$ qui lui est parallèle et égale à $b\,e$. Une bride C d s'articule à l'angle d du parallélogramme, et tourne autour d'un point fixe C tel que l'horizontale menée par

ce point divise en deux parties égales l'angle décrit par le balancier. Il s'agit de proportionner la longueur des tiges de telle sorte que *f*, qu'on nomme quelquefois le point parallèle, se meuve sur la même verticale ou à très-peu près.

Soit donc A E = A *e* = R, *b e* = *f d* = R$_1$, C *d* = *r*.

Menons K *d* et C M parallèles à A B, on a K *d f* = B A *b* = θ, et faisons M C *d* = φ.

De même que précédemment, le point *d* est porté vers K d'une quantité égale à C *d* × sin. vers. φ = *r* sin. vers. φ, et le point *f* décrit simultanément ce chemin vers K et un autre chemin en sens opposé par le changement d'inclinaison de *df*, qui est égal à *df* × sin. vers. *f d* K = R$_1$ sin. vers. θ.

Si ces deux chemins sont égaux, le point *f* demeure sur la verticale B*f*, ce que l'on veut obtenir.

Donc on posera :

$$r \text{ sin. vers. } \varphi = R_1 \text{ sin. vers. } \theta, \text{ ou } \frac{r}{R_1} = \frac{\text{sin.}^2 \frac{\theta}{2}}{\text{sin.}^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Mais les leviers A *e*, C *d*, réunis par la bielle *e d*, fournissent un système semblable à celui de la fig. 549; nous pouvons donc écrire de même :

$$A\,e \text{ sin. } \frac{\theta}{2} = C\,d \text{ sin. } \frac{\varphi}{2}, \text{ ou } R \text{ sin. } \frac{\theta}{2} = r \text{ sin. } \frac{\varphi}{2},$$

à très-peu près, d'où :

$$\frac{\text{sin.}^2 \frac{\theta}{2}}{\text{sin.}^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{r}{R_1} \text{ et } r = \frac{R^2}{R_1},$$

c'est-à-dire que A *e* doit être moyenne proportionnelle entre C *d* et *df* ou *b e*.

656. Le père Carbonnel (Mémoires de l'Académie de Belgique) a déterminé d'une manière générale, par des recherches analytiques, les proportions des éléments du parallélogramme qui assurent la plus grande étendue possible au mouvement circulaire

du balancier, et au mouvement rectiligne de la tige du piston (dans l'application faite à la machine à vapeur), en même temps qu'elles donnent à ce dernier mouvement toute la rectitude dont il est susceptible. Il était arrivé par une analyse approximative aux conclusions suivantes :

La direction V V′ du mouvement rectiligne coupant le rayon

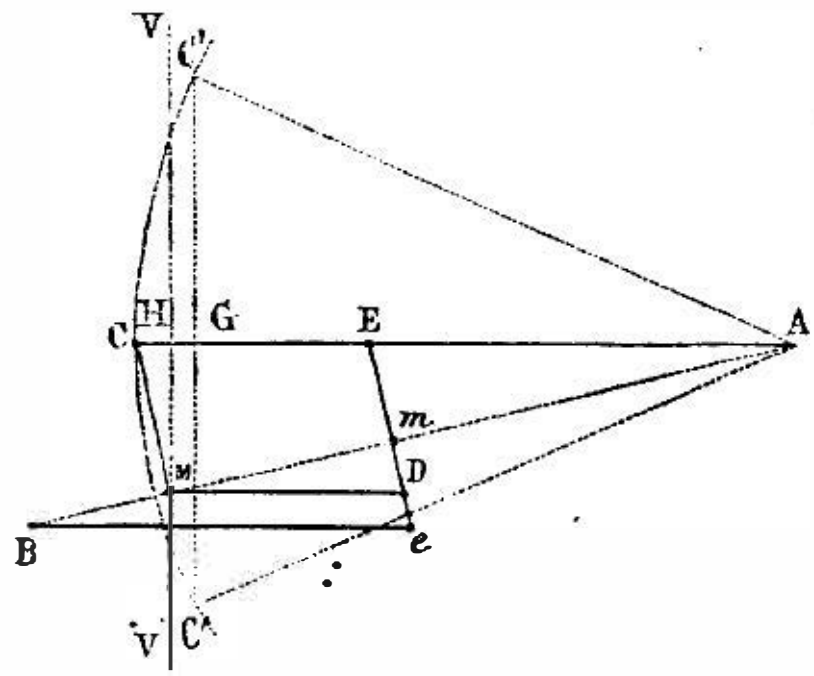


Fig. 653.

horizontal A C divisant en deux parties égales la course totale C′ C″ doit être située au milieu de la distance qui sépare le point C de la droite C′ C′ ; le point E doit être situé au milieu du demi-balancier A C ; le côté E*e* doit être pris aussi grand que la machine le comporte.

Ces résultats confirment pleinement les règles de Watt, qui prenait le point E au milieu du balancier, et E*e* compris entre $\frac{3}{7}$ et $\frac{1}{2}$ de C′ C′, et $A\,G = \frac{3}{2}\,C'\,C'$.

657. En y réfléchissant toutefois, on s'aperçoit que c'est une faute que de rendre la déviation nulle pour les points extrêmes, comme on le fait par tradition, sans remarquer qu'on pouvait, avec avantage, rapprocher les points limites.

Dans un travail inséré dans les Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg, un analyste russe fort distingué, M. Tchébychew, a critiqué la méthode ci-dessus indiquée, et a montré qu'elle ne conduisait pas à la meilleure solution possible.

« Si l'on trouve, dit-il, qu'il y ait un avantage particulier à

» donner à la tige du piston la direction tout à fait exacte au » commencement, au milieu et à la fin de la courbe, la tige- » guide qu'on trouve d'après la méthode dont nous venons de » parler est évidemment la seule qui remplisse cette condition. » Mais ce cas, comme nous le verrons, n'est pas le plus favorable » pour la précision du jeu du parallélogramme dans les autres » points de la course du piston. Quant à la position la plus » avantageuse de la tige du piston par rapport au balancier, le » principe précédent ne nous la donne pas. D'après la théorie » que nous proposons, la tige du piston doit être plus ou moins » rapprochée du centre du balancier, selon les dimensions du » parallélogramme, et, dans les cas les plus ordinaires, sa direc- » tion ne passera pas par le milieu du sinus-verse de l'arc décrit » par l'extrémité du balancier. Ainsi, dans le cas où le parallélo- » gramme de Watt est construit sur la demi-longueur du bras du » balancier (comme Watt l'a fait lui-même, et comme on doit le » faire si l'on est maitre de disposer des dimensions du parallélo- » grainme), on diminue notablement la limite de la déviation de » la tige de sa direction normale, en l'approchant du centre du » balancier plus qu'on ne devrait le faire d'après le principe dont » nous venons de parler, savoir: 1) si, dans le cas où l'on cher- » che à rendre la position de la tige tout à fait verticale au com- » mencement, au milieu et à la fin de la course, on prenait » pour sa direction la ligne qui divise le sinus-verse de l'axe dé- » crit par l'extrémité du balancier dans le rapport de 2 à 1, » et 2) si, dans le cas où l'on ne cherche pas l'exactitude absolue » dans les deux positions extrêmes de la tige, on prenait pour sa » direction la ligne qui divise ce sinus-verse dans le rapport » de 5 : 3.

» Dans le dernier cas, la tige-guide ne sera plus déterminée » par les positions limites du balancier; on doit pour cela » prendre les positions qui les précèdent à peu près d'un qua- » rantième de l'amplitude de l'oscillation. Quelque petites que » soient les modifications dans la construction du parallélo- » gramme de Watt que nous venons de mentionner, et qui ne

» sont que des résultats approximatifs tirés de nos formules, » elles augmentent notablement la précision de son jeu. A l'aide » de l'analyse on peut facilement s'assurer qu'avec ces modifi- » cations la limite de déviation de la tige par rapport à la ligne » verticale diminue de plus de moitié.

» Cela prouve que le principe qui est la base de la théorie » actuelle du parallélogramme est loin de réduire au *minimum* » la limite de ses déviations, si nuisibles par les efforts latéraux » qui en résultent sur la tige du piston, et par conséquent que » non-seulement pour la théorie, mais aussi pour la pratique » elle-même, il importe qu'il soit remplacé par une méthode » directe. »

Dans une savante analyse, l'auteur se propose de déterminer directement le *minimum* absolu des écarts, et en déduit les résultats indiqués ci-dessus, grâce à un maniement très-habile des ressources de l'analyse mathématique la plus élevée.

658. Le parallélogramme de Watt peut servir à guider en ligne droite deux tiges à la fois. En effet la tige O B′ (fig. 549) rencontre le côté D′ c′ en un point *b′* qui reste le même sur cette droite, quelle que soit la position du parallélogramme, et ce point *b′* décrit une ligne semblable à celle décrite par le point B′, ces deux lignes ayant leur centre de similitude au point O. Il s'ensuit que la seconde approche d'une ligne droite, de même que la première.

La démonstration est facile; en effet on a :

$\frac{D'\,b'}{A\,B'} = \frac{O\,D'}{O\,A'}$ ou $D'\,b' =$ constante, à cause de la similitude des triangles O D′ *b*, O A′ B.

Par suite on a de même $\frac{O\,b'}{O\,B'} = \frac{O\,D'}{O\,A'} =$ constante; les deux courbes sont donc semblables.

659. S'il fallait mouvoir avec un même balancier plus de deux tiges à mouvements parallèles, il serait facile d'y parvenir simplement.

Soient en effet V V_1 V_2 V_3 quatre directions données pour les

tiges que l'on veut faire conduire par le balancier A C. M étant le premier sommet déterminé d'un premier parallélogramme, dans la position moyenne du balancier, joignons A M; nous déterminons ainsi les points M_1 p M_2, m, à la rencontre avec les directions V V_1 V_2, qui décrivent dans le plan du mouvement du balancier des courbes semblables. Menant ensuite les parallèles à C M, M_1 C_1, M_2 C_2... E m et prenant $m\,e = m\,E$, enfin menant e B parallèle à A C, on obtient le point B, axe d'oscillation de la bride B e.

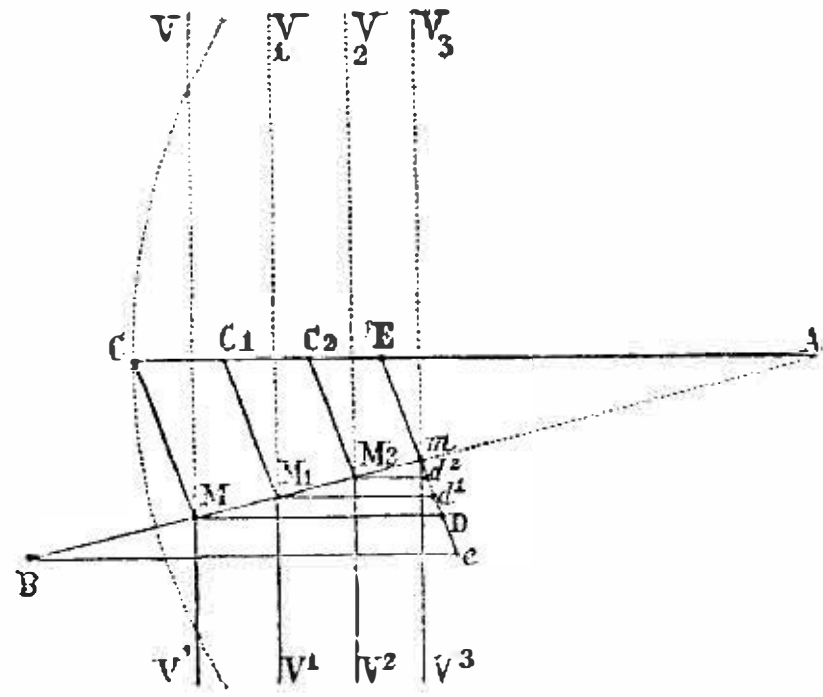


Fig. 554.

Les parallélogrammes C M D E, C_1 M_1 d_1 E, C_2 M_2 d_2 E guideront également bien les diverses tiges qui doivent se mouvoir parallèlement.

La détermination du point B ainsi obtenu place bien le point M au point d'inflexion de la courbe en 8 toujours située sur la ligne A B (qui réunit les deux centres de rotation), et pour déterminer un centre B peu éloigné, il convient de faire, comme Watt, le côté du parallélogramme C E = 1/2 C A; la distance entre les axes B et A est alors réduite au minimum.

660. *Vitesses des diverses parties.* — Le parallélogramme de Watt fournit le moyen d'obtenir le mouvement rectiligne alternatif au moyen du circulaire continu, à l'aide d'une bielle interposée entre la manivelle et le balancier et d'une seconde bielle qui réunit d'autre part ce balancier avec la tige qui doit être mue

d'un mouvement rectiligne (en faisant varier convenablement son inclinaison par l'effet d'un contre-balancier).

Les vitesses élémentaires de chacun de ces systèmes se déterminent, ainsi que nous l'avons déjà dit, à l'aide des centres instantanés de rotation, et comme le montre M. Girault, l'expression de ces rapports conduit immédiatement à celle des mouvements circulaire continu et rectiligne alternatif, les deux vitesses du balancier à ses deux extrémités étant nécessairement les mêmes.

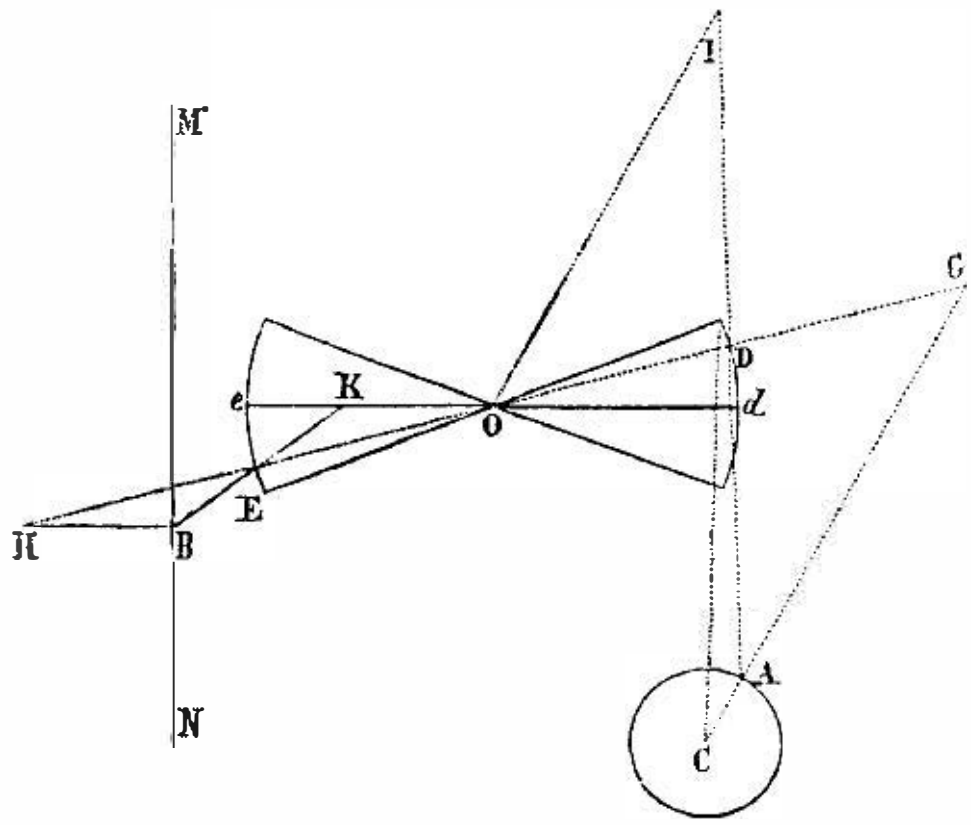


Fig. 555.

Dans le premier système on aura, G étant le centre instantané de rotation :

$$\frac{\text{Vitesse de D}}{\text{Vitesse de A}} = \frac{GD}{AG};$$

Dans le deuxième :

$$\frac{\text{Vitesse de B}}{\text{Vitesse de E}} = \frac{HB}{HE};$$

d'où

$$\frac{\text{Vitesse de A}}{\text{Vitesse de B}} = \frac{AG}{GD}\,\frac{HE}{HB},$$

celles de D et E étant les mêmes.

Si l'on mène par le point O une parallèle à A G qui coupe en I le prolongement de la bielle, nous aurons les deux triangles semblables O D I, G D A, qui donneront $\frac{OI}{OD} = \frac{GA}{GD}$.

Prolongeons la bielle EB jusqu'à sa rencontre en K avec l'horizontale *c d*, le triangle OKE sera semblable au triangle HBE, et on aura $\frac{OK}{OE} = \frac{HB}{HE}$.

Donc, enfin, à cause de l'égalité de OD = OE, on aura

$$\frac{\text{Vitesse de A}}{\text{Vitesse de B}} = \frac{OI}{OK}.$$

661. Nous n'avons pas besoin d'insister sur les avantages qu'offre le parallélogramme de Watt au point de vue du frottement quand on le compare aux glissières. Composé d'articulations qui ne parcourent qu'une petite étendue, le travail du frottement y est peu considérable, comme nous l'avons vu au livre Ier. Ce n'est que la suppression du balancier, dans beaucoup de machines à vapeur modernes, qui justifie l'usage moins fréquent que l'on fait aujourd'hui de ce guide du mouvement, mais il n'en reste pas moins une des plus ingénieuses combinaisons mécaniques dues au génie de l'illustre Watt.

662. *Pendule de White.* — Un appareil curieux au point de

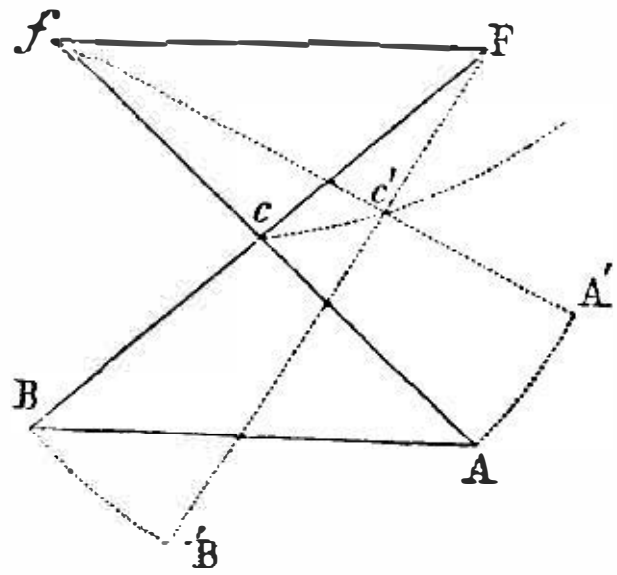


Fig. 556.

vue théorique a été combiné par White et repose sur les propriétés d'un système de deux manivelles qui se croisent. Il consiste en une barre rigide et lourde AB, suspendue à une barre égale F*f* par des tiges diagonales *f* A, F B, qui sont de véritables rayons de manivelle.

Les points de rencontre de ces rayons seront évidemment en

chaque instant les centres instantanés de rotation de la barre AB.

Pour ces points on arrive à ce résultat curieux, que, comme ils se déplacent simultanément et d'un mouvement continu sur les deux rayons, la somme des distances de ces points aux centres fixes de rotation restera constante, par suite que la succession de ces points d'intersection tracera une *ellipse* dont les points de suspension F, *f* sont les foyers.

663. ***Articulations dans des plans différents.*** — La solution approchée que fournit le parallélogramme de Watt pour guider un mouvement rectiligne s'applique essentiellement au cas où la direction de ce mouvement est perpendiculaire aux axes de rotation. M. Sarrut a fait la précieuse remarque que l'emploi de doubles systèmes articulés fournissait directement une solution complète du problème, à la condition que les axes de rotation des deux systèmes fussent dans des plans différents.

Imaginons l'ensemble composé de cinq barres réunies deux à deux par des articulations. La première tourne autour de l'axe MM, celle-ci et la seconde sont articulées suivant l'axe NN parallèle à MM, et cette seconde porte un axe d'articulation PP également parallèle à MM. Un second système partant de l'axe fixe SS est analogue au premier et comporte de même trois axes parallèles entre eux, mais non parallèles aux premiers.

Soit CD la plus courte distance des deux derniers axes PP et QQ ; abaissons du point C sur NN la perpendiculaire CB, du point B sur MM la perpendiculaire BA; de même du point D abaissons sur RR la perpendiculaire DE, du point E sur SS la perpendiculaire EF. Les droites AB, EF étant des manivelles, les trois autres sont des bielles qui font mouvoir l'une par l'action de l'autre.

Dans quelque position que puisse prendre le système, les droites AB, BC et CD, toutes trois perpendiculaires à MM, sont situées toutes trois dans un même plan perpendiculaire à cette ligne. Les droites EF, DE, CD, toutes trois perpendiculaires à SS, sont situées constamment dans un même plan, et CD, qui est à la fois dans les deux plans, est leur intersection.

Donc enfin, par le fait des deux systèmes d'articulations non parallèles, on aura produit le mouvement rectiligne suivant CD perpendiculairement aux deux axes. C'est là une conséquence forcée de la nature des articulations formées par des axes du système tour, qui ne peuvent permettre de mouvement que perpendiculairement à ces axes.

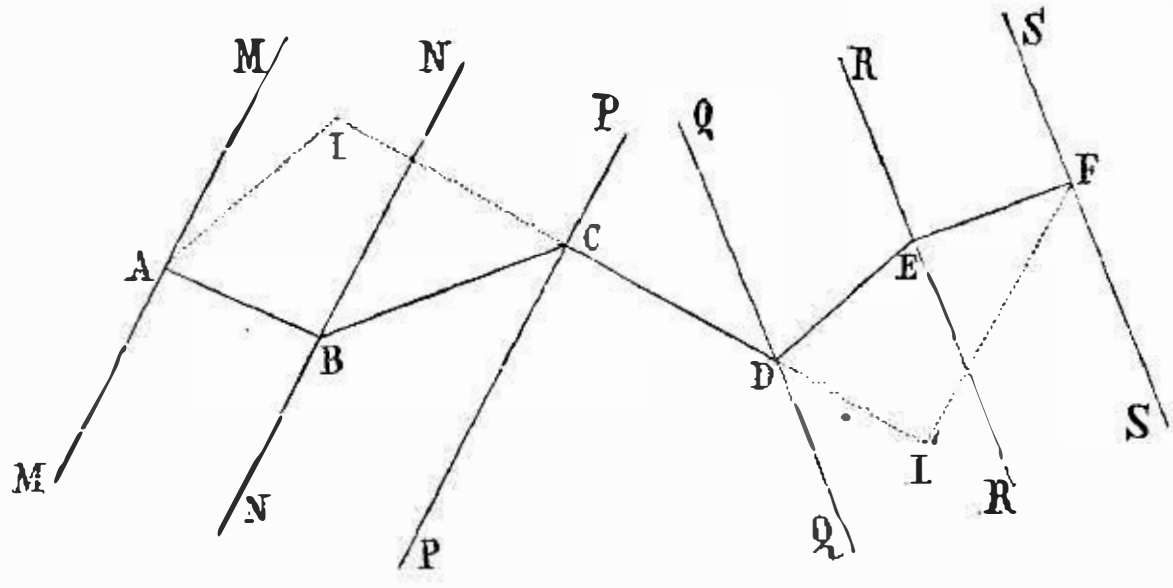


Fig. 557.

664. Le rapport des deux vitesses angulaires autour des axes fixes au mouvement de translation est donné par les longueurs des droites menées des centres de rotation perpendiculairement à la direction du mouvement de translation. AI, FI′ étant ces longueurs (ramenées sur un plan parallèle à leur direction pour avoir leur grandeur réelle), on a :

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{AI}{FI'} \text{ et } \frac{V}{\omega} = AI \quad \frac{V'}{\omega'} = FI'.$$

665. Dans le modèle que M. Sarrut avait présenté à l'Académie des sciences lors de l'invention de ce système, il obtenait le mouvement rectiligne d'une tige de piston à l'aide du système ordinaire d'une manivelle et d'une bielle agissant sur un troisième axe. Celui-ci portait en outre un croisillon, un second axe de rotation, lequel faisait partie, à son tour, d'un autre système articulé semblable au premier, dont les axes servant de charnières étaient dirigés perpendiculairement à ceux du système précédent.

666. *Mouvement circulaire en rectiligne.* — Lorsque la bielle communique un mouvement rectiligne suivant une droite pas-

sant par lelcentre de rotation de la manivelle, un point de la biellel devientune courbe limitéepar lespositions extrémesl de lalbielle.

Dans le cas où la bielle est assez longue pour pouvoir être considérée eomme restant toujours parallèle à elle-même, cette courbe se réduit évidemmentà un simplelarc de cercle, de même rayon que celui décrit parllelboutonl de la manivelle; ce n'est qu'unltransportldelcourbe.

Danslecaslgénéral, celuelpeut être qu'unecourbe sanspoint d'inflexion, un cercle déformé en raison de la longueurlde la bielle, celle-ci ne pouvant plus, comme lorsqu'elle s'appuie sur deux arcs de cercle, prendre, pour une même position deson extrémitélsur lalcirconférence,ldeuxlinclinaisonsdifferentes.

667. Le mouvement rectiligne alternatif engendré par le mouvement circulaire de la manivelle alétél étudié pluslhautlenl détail.C'estcelsystèmelrépétéldeux foisquilconstitue lalcoulissede Stephenson,lingénieuse combinaisonld'organes.

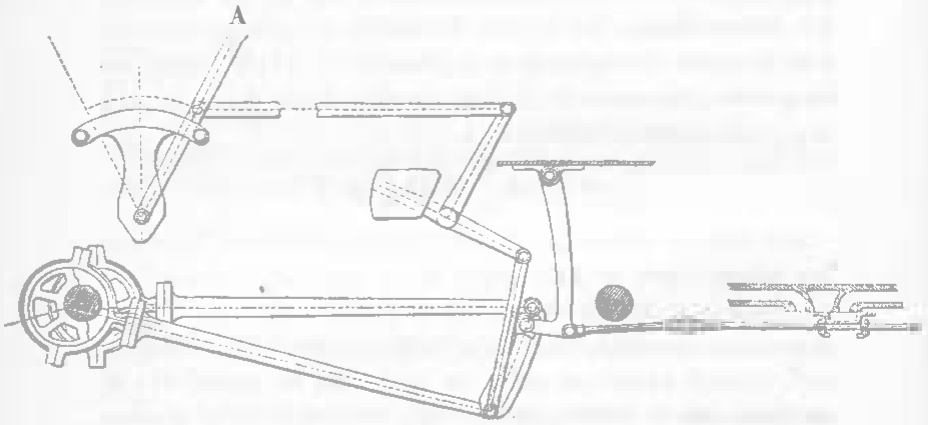


Fig. 558.

668. *Coulisse Stephenson.*—C'esten effetpar lacombinaison de deuxbiellesmuespardeuxexcentriquescirculaires| cequilrevient àdeuxlmanivelles, quelStephensonalimaginédemouvoirletiroir des locomotives, de lui communiquer le mouvement rectiligne

alternatif. En articulant les extrémités de ces bielles avec une rainure courbe qui reçoit l'extrémité de la tige qui guide le tiroir et qui par suite lui communique un mouvement qui résulte de la combinaison des deux autres, il est parvenu par un système articulé à satisfaire à des conditions complexes.

Les deux excentriques motrices forment entre elles un angle obtus; chacune d'elles conduit une bielle articulée à l'une des extrémités d'une coulisse, d'une rainure dans laquelle s'engage la tête de la tige qui règle le mouvement du tiroir (fig. 558), et dont on fait varier la position à l'aide d'un levier A, qui est à la portée du mécanicien

C'est en raison des positions de ce levier que se modifie la distribution de la vapeur, et cela en changeant la position de la coulisse dans le sens vertical. Il est facile d'analyser grossièrement comment se produisent le mouvement et l'action de la coulisse pour effectuer le changement de marche et le repos, produire la détente qu'elle permet d'obtenir, en traçant pour les diverses inclinaisons du levier les positions extrêmes de l'oscillation de la coulisse.

Soit H H, l'horizontale passant par l'axe de l'essieu moteur, A B la tige qui guide le tiroir, il est clair qu'on aura la course de ce tiroir en mesurant les déplacements de la coulisse sur l'horizontale passant par l'axe de sa tige. Si on trace pour chaque cas les limites des extrémités de la course de la coulisse pour les positions extrêmes des excentriques, $2e$ étant la course de ces points extrêmes, e étant l'excentricité, on aura :

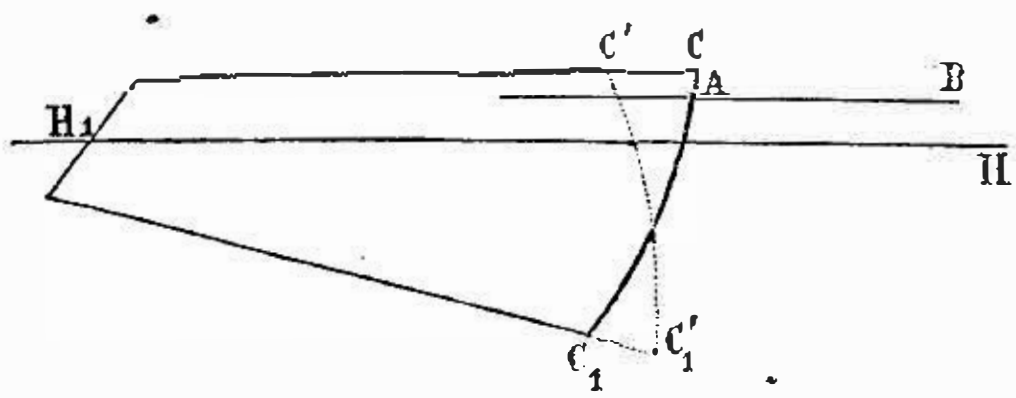


Fig. 559.

Fig. 559, le maximum de course possible lorsque C C′ est dans le prolongement de A B.

Fig. 560, l'arrêt lorsque les points d'intersection des positions extrêmes de la coulisse sont situés sur AB; le tiroir ne marche plus et la machine s'arrête. Ce point n'est pas unique, mais sa position varie assez peu pour que le recouvrement du tiroir assure le repos.

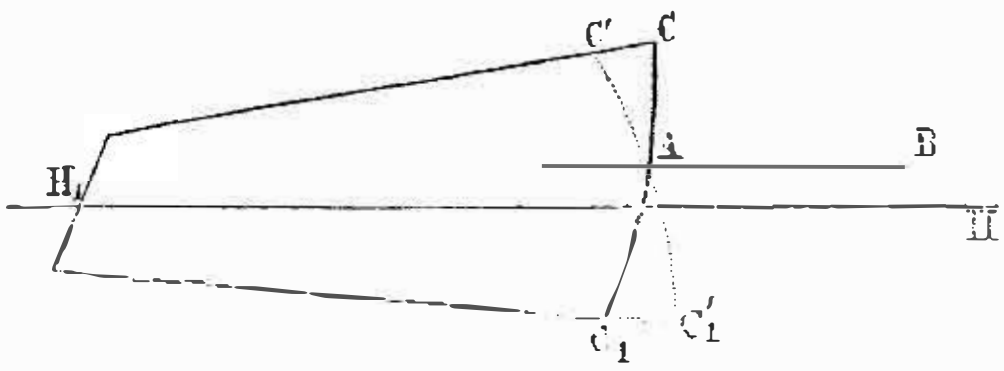


Fig. 560.

Enfin le changement de marche. La figure 561 montre comment, en relevant la coulisse, la tige du piston, qui était par exemple poussée en avant, vers la partie supérieure de la coulisse, par le retour de la position C′C′, à la position CC,, va être soumise à l'action de la deuxième excentrique dont le mouvement est inverse, d'où conservation du sens de mouvement du tiroir pendant la deuxième partie de la rotation de l'essieu, et par suite changement de sens de l'action du piston.

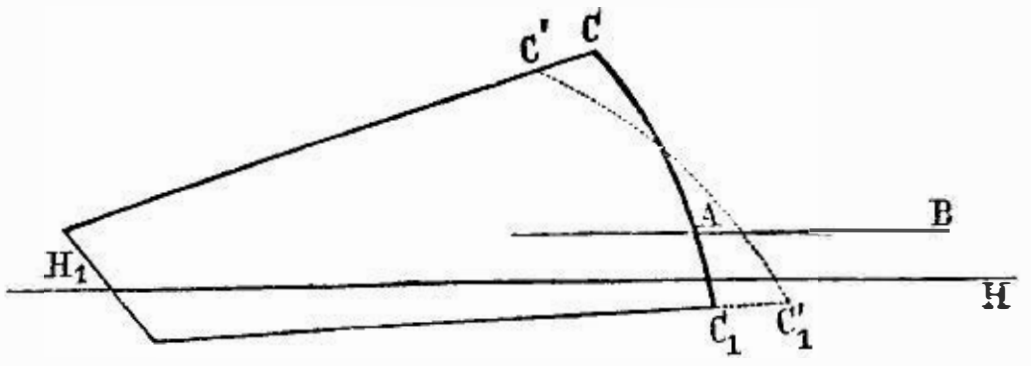


Fig. 561.

Remarquons enfin que, dans les positions intermédiaires de ● au maximum, la course du tiroir varie d'étendue, d'où résulte la détente variable en raison des crans de détente auxquels le mécanicien fixe le levier.

669. La mesure des variations relatives du changement de course du tiroir et de la place occupée par la coulisse, évidemment possible d'après les relations qui existent entre les lignes

et les angles de la figure, mène à des formules trop complexes pour la pratique. Elles ont été toutefois beaucoup simplifiées par M. Philips par un heureux emploi des centres instantanés de rotation.

Soient O H et O V l'horizontale et la verticale passant par l'axe de l'essieu moteur, C S C, la coulisse à une époque quelconque de son mouvement, S le point d'attache de celle-ci avec la bielle de suspension B S, D C et D, C, les barres d'excentrique dans la position correspondante.

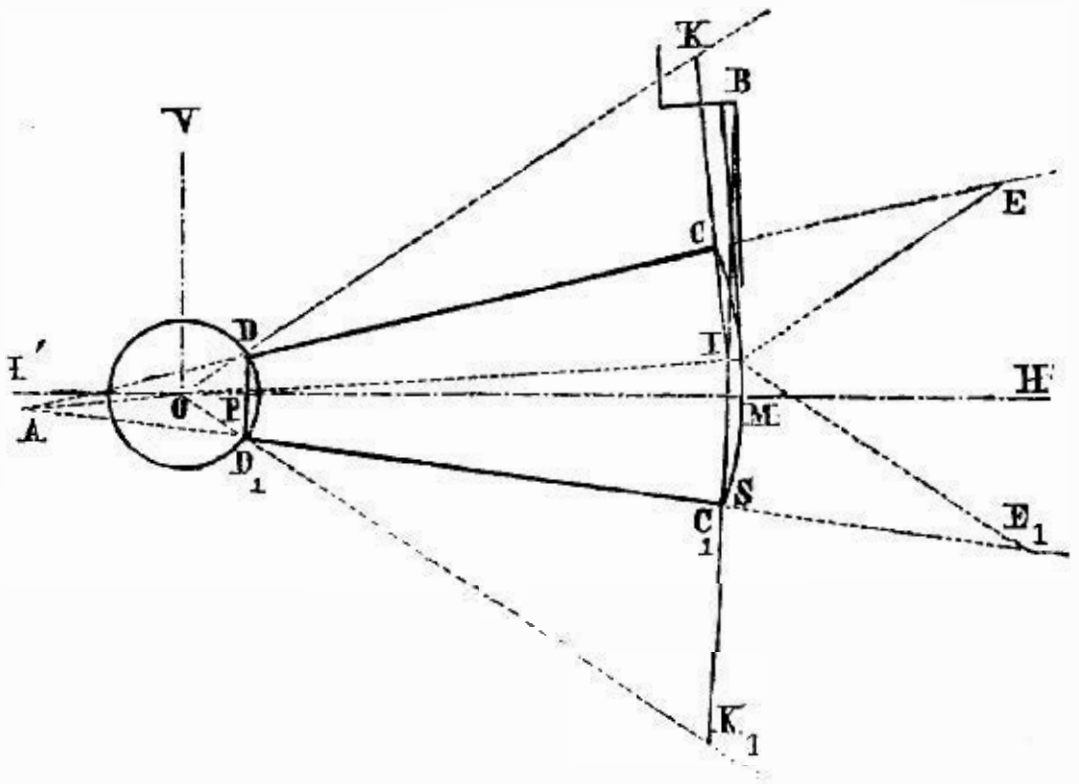


Fig. 562.

La coulisse effectuant un déplacement infiniment petit, où sera placé le centre instantané de rotation?

Il sera d'abord placé sur B S, le point S décrivant nécessairement un arc normal à B S, soit I ce point. S'il était connu, en menant les lignes I C, I C,, et prolongeant les rayons O D, O D,, on aurait les points K, K,, centres instantanés de rotation des barres d'excentrique. Cette détermination géométrique du point I résulte d'une construction très-élégante.

Le point C décrit un petit arc de cercle autour du point I égal à C I $d\alpha$, donc la barre d'excentrique D C tourne autour du point K d'un angle $\frac{C I \times d\alpha}{C K}$, I C étant très-voisin de la perpendiculaire à C D, le point C ne s'élevant jamais beaucoup, et le point D

décrit, pour un angle égal à celui parcouru par CK, un petit arc de cercle égal à $\frac{CI \times CD}{CK} d\alpha$.

On voit de même que le point D_1 parcourt un petit arc de cercle égal à $\frac{C_1I \times C_1D_1}{C_1K_1} d\alpha$.

Or les espaces absolus décrits par les points D et D_1 autour d'un même axe de rotation sont entre eux comme les rayons d'excentricité, c'est-à-dire que l'on a :

$$\frac{CI \times CD}{CK} : \frac{C_1I \times C_1D_1}{C_1K_1} = OD : OD_1$$

Or si nous menons par le point I une parallèle IE à OD et terminée à la ligne DC prolongée, et de même une ligne IE_1 parallèle à OD_1, les triangles CIE, DCK sont semblables et donnent les proportions :

$$IE : CD = CI : CK \text{ ou } IE = \frac{CI \times CD}{CK}.$$

Le triangle IE_1 donne de même :

$$IE_1 = \frac{C_1I \times C_1D_1}{C_1K_1}.$$

Donc, $$IE : IE_1 = OD : OD_1.$$

Telle est la condition à laquelle doit satisfaire le point cherché I. Il résulte de là que, pour déterminer ce point I, il suffit de prolonger les deux barres d'excentrique jusqu'à leur rencontre A et de joindre AO; l'intersection de cette ligne avec la bielle de suspension BS sera le point I cherché.

En effet, par le point I ainsi déterminé, menons les deux droites IE, IE_1 parallèles à OD, OD_1, on aura :

$$IE : OD = AI : AO$$

$$IE_1 : OD_1 = AI : AO$$

donc, $$IE : IE_1 = OD : OD_1, \text{ comme ci-dessus.}$$

Dans la pratique, $OD = OD_1$, donc $IE = IE_1$.

Nous avons vu plus haut que le point D décrit un petit arc égal à $\frac{CI \times CD}{CK} d\alpha = IE\, d\alpha = h\, d\alpha$ en posant $IE = h$.

Appelons ω l'angle décrit par les rayons d'excentricité ou par l'essieu moteur, et soit $d\omega$ l'angle infiniment petit dont tourne cet essieu pendant que la coulisse tourne de l'angle α. Si r est le rayon d'excentricité, $r\,d\omega$ sera l'angle infiniment petit décrit par le point D, et on aura, d'après ce qui précède :

$$r\,d\omega = h\,d\alpha \text{ ou } d\alpha = \frac{r}{h}\,d\omega \quad (1).$$

Il résulte de ce qui précède un moyen assez simple de faire l'épure d'une distribution dont les éléments sont donnés. Il suffit pour cela de faire tourner les deux rayons d'excentricité d'angles suffisamment petits à la fois, pour qu'on puisse supposer que pour chacun de ces petits mouvements la coulisse tourne autour d'un certain centre instantané. La position de ce centre I se déterminera chaque fois en prolongeant les barres d'excentrique jusqu'à leur rencontre A joignant A O et cherchant l'intersection I de A O avec la bielle de suspension B S. Connaissant le centre I, on décrira de ce point, comme centre, de petits arcs de cercle, l'un avec I C et l'autre avec I C, pour rayon, puis on cherchera les intersections respectives de ces deux arcs avec deux autres décrits, avec un rayon égal à la longueur de la barre d'excentrique, l'un du point D comme centre et l'autre du point D, On obtiendra ainsi les positions exactes de la coulisse pour les diverses positions du levier.

M. Philips a montré dans son Mémoire comment l'expression de la valeur $\frac{r}{h} = \frac{AO}{AI}$, rapport qu'on peut remplacer par celui des projections de ces lignes sur l'horizontal OH, qu'on peut calculer en fonction des divers éléments de la figure, permettait d'obtenir à l'aide de l'équation (1), et en introduisant quelques simplifications, une valeur suffisamment simple pour la pratique de la marche du tiroir en raison de celle de l'essieu, de l'angle de calage et des dimensions des excentriques, enfin de la position de la coulisse.

Il arrive ainsi à l'expression $\alpha = \frac{r}{c}$ sin. θ sin. ω, c étant la

demi-longueur de la coulisse, θ l'angle de calage, qui permet d'obtenir en chaque instant les valeurs de la marche du tiroir.

Nous renverrons à son savant mémoire pour l'étude de cette question spéciale d'une solution relativement facile, sauf les difficultés purement analytiques, quand on est parvenu à l'élégante relation exprimée par l'équation (1).