

**DEUXIÈME SECTION.****Axes non parallèles. — Rapport de vitesse constant.****I. AXES QUI SE RENCONTRENT.****1° ORGANES AGISSANT PAR CONTACT IMMÉDIAT ET AVEC FROTTEMENT DE ROULEMENT.**

262. Soient  $AB$ ,  $AC$  deux axes se coupant en  $A$  (fig. 232), qui doivent se mouvoir avec des vitesses angulaires dans un rapport constant et égal à  $\frac{m}{n}$ .

Par un point quelconque de l'un d'eux, de  $AB$  par exemple, on mènera une parallèle  $DF$  à  $AC$ .

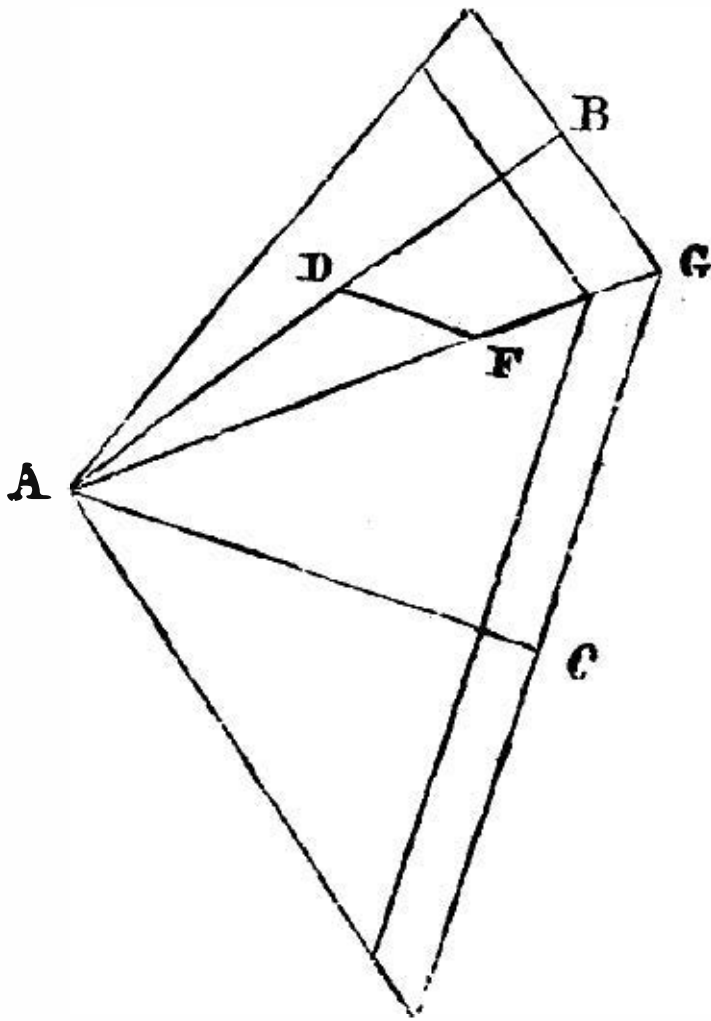


Fig. 232.

Prenons  $DF$ , tel que  $DF$  soit à  $AD$  dans le rapport des vitesses, et traçons la ligne  $AFG$ . Abaissons par un point quelconque  $G$  de cette ligne  $G$  les perpendiculaires  $GB$ ,  $GC$ , la rotation des triangles rectangles  $ACG$ ,  $ABG$ , autour des axes  $AB$  et  $AC$ , engendrera deux cônes droits qui se conduiraient

mutuellement par l'adhérence de leurs surfaces convexes comme les rouleaux cylindriques dans le cas de deux axes parallèles, c'est-à-dire que, s'ils roulent l'un sur l'autre sans glissement, leurs vitesses angulaires seront dans un rapport constant et égal au rapport inverse des rayons  $R_1, R_2$  des bases de chacun des cônes.

En effet on a :

$$\frac{DF}{AD} = \frac{\sin. DAF}{\sin. AFD} = \frac{\sin. DAF}{\sin. GAC} = \frac{BG}{GC} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{m}{n}.$$

*Angles au sommet.* — On déduit facilement de ce qui précède la valeur des angles au sommet.

Soit  $\theta$  l'angle  $BAC$  des deux axes,  $K$  le  $\frac{1}{2}$  angle au sommet du cône  $AB$ , le rapport ci-dessus devient :

$$\frac{\sin. (\theta - K)}{\sin. K} = \frac{m}{n} \text{ ou } \text{tang. } K = \frac{\sin. \theta}{\frac{m}{n} + \cos. \theta}.$$

Lorsque l'angle  $\theta$  est droit :

$$\text{tang. } K = \frac{n}{m}.$$

263. Si la résistance excède la valeur du frottement de roulement, on ne peut employer comme organes de transmission le système de deux rouleaux coniques. Pour éviter les frottements de glissement des engrenages de *force*, on peut toutefois, pour de faibles résistances, employer un engrenage conique à frottement de roulement, construit d'après les principes que nous avons exposés en traitant des engrenages cylindriques.

Si l'on trace dans le plan tangent commun aux deux cônes une ligne quelconque, et qu'on enroule ce plan sur chacun de ceux-ci, les lignes tracées sur les cônes rouleront l'une sur l'autre dans le mouvement. La plus simple des lignes que l'on puisse prendre est la ligne droite, qui, en s'enroulant autour de chaque cône, produit une spirale hélicoïde dont la projection est une spirale d'Archimède ( $\rho = a\omega$ ).

Pour que ces courbes puissent se conduire, il faut les *habiller*, c'est-à-dire les mettre en saillie, de manière que ce soit par elles que le contact ait lieu. Pour cela on fait glisser le long de cette

courbe une ligne droite constamment normale au cône. La surface hélicoïde que nous avons décrite à propos des roues cylindriques est une surface de ce genre.

Par de semblables surfaces répétées, on formera les surfaces des dents de deux roues, se touchant suivant des points répartis sur les lignes de contact, déterminées comme nous venons de le dire; les deux axes seront conduits par contact immédiat et avec frottement de roulement par des engrenages de *précision*, c'est-à-dire pour lesquels le contact des dents n'aura lieu qu'en un point.

264. Si les deux axes forment un angle droit, deux surfaces coniques ne sont plus indispensables, et l'on peut employer le système représenté fig. 233, qui ne comporte que des roues cylindriques. Sur un des axes est montée une roue plate sur laquelle repose la jante d'une roue de faible épaisseur (autrement

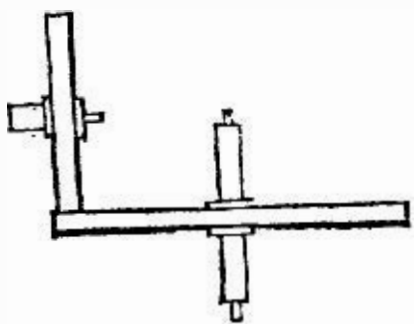


Fig. 233.

le glissement, la différence du chemin parcouru par les circonférences de chacun des deux cercles de base de la roue serait sensible) montée sur l'autre axe. Le mouvement de la première roue fera marcher la seconde, pourvu que la résistance à surmonter soit inférieure à la valeur du frottement de

glissement au contact des deux surfaces.

## 2° ORGANES A CONTACT IMMÉDIAT ET FROTTEMENT DE GLISSEMENT.

265. Comme pour les engrenages plans, le problème à résoudre

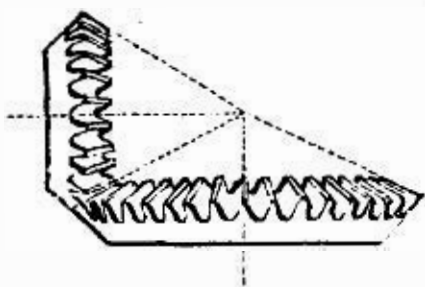


Fig. 234.

pour transmettre des efforts un peu considérables est d'armer les cônes primitifs d'aspérités qui les fassent se mouvoir, comme s'ils se conduisaient par simple contact. Telle est la disposition de l'engrenage conique ou *roue*

*d'angle* que représente la fig. 234. C'est par l'étude des mouvements relatifs qu'on arrive à en déterminer les éléments.

266. *Mouvements relatifs.* — MS, SC (fig. 225) étant les deux axes de rotation qui se rencontrent en un point S, prenons ce point pour centre d'une sphère; elle renfermera les deux cônes droits déterminés comme nous venons de le dire, ayant leur sommet commun au centre de la sphère, et les coupera suivant deux circonférences de cercle de leurs bases tangentes en un point A correspondant à un point de génératrice de contact des deux cônes.

D'après le mode de construction des cônes, ceux-ci, se conduisant par simple contact, tourneront en raison inverse du rapport des vitesses, et les deux circonférences placées sur la sphère se conduiront absolument de même que dans le cas des engrenages cylindriques lorsqu'elles sont situées dans un même plan. Des longueurs égales passeront par le point de contact, et les rayons CA, MA, menés par des plans perpendiculaires à l'axe, tourneront en raison inverse des vitesses, comme les plans méridiens SCA, SMA.

La sphère jouant ici le même rôle que le plan fixe considéré dans les mouvements relatifs sur un plan, toutes les propriétés déjà trouvées devront se reproduire sur la sphère.

Ainsi, à cause de la symétrie parfaite de la figure et de la nature de mouvement du roulement, on détermine la courbe décrite par un point d'une des circonférences primitives, en faisant rouler les cônes sur l'autre immobile; la courbe ainsi engendrée est l'*épicycloïde sphérique*. Une semblable courbe, obtenue à l'aide d'une petite circonférence roulant sur chacune des circonférences primitives, sur l'une à l'intérieur et sur l'autre à l'extérieur, déterminera des épicycloïdes qui, jointes au centre par des rayons, donneront des surfaces qui pourront se conduire dans les conditions des engrenages. En chaque instant



Fig. 225.

il y aura un point commun aux deux épicycloïdes, et par suite des éléments de la surface en contact. C'est ce que nous allons démontrer ci-après.

Une figure en perspective fait bien voir le mode de génération des épicycloïdes sphériques engendrées par les divers points d'une génératrice, courbes qui conduisent simplement au mode de construction des dents des roues, et permettent d'obtenir en chaque instant les surfaces enveloppes et enveloppées qui conduiront les deux axes, comme si les deux cônes primitifs roulaient l'un sur l'autre.

267. Remarquons que les engrenages coniques seront voisins des engrenages extérieurs si l'angle des plans sections des bases est obtus, et des engrenages intérieurs, et par suite inapplicables souvent, si cet angle était aigu. Aussi l'angle droit est-il la limite inférieure adoptée dans la pratique, et, sauf ce cas, l'on peut toujours, en prolongeant l'un des axes, s'il est nécessaire, faire faire aux plans des roues un angle obtus.

Appliquons les principes exposés aux solutions qui correspondent à celles adoptées par la pratique pour les engrenages plans.

268. *Engrenage à flancs.* — Le flanc étant un plan diamétral du cône primitif, la dent conductrice sera une surface conique dont il faut déterminer la forme.

Soient  $SO$ ,  $SO'$  (fig. 236) les axes des deux cônes qui doivent tourner en se touchant toujours, suivant une arête  $SM$ . Soient  $MmN$ ,  $Mm'N'$  les circonférences des cercles provenant de l'intersection des deux cônes, par des plans menés perpendiculairement par le point  $M$  à leurs axes respectifs.

Que sur le rayon  $MO'$  du cercle  $O'$  comme diamètre on décrive une circonférence  $O''$ , et que par son centre  $O''$  on élève une perpendiculaire sur son plan, cette perpendiculaire rencontrera l'axe  $OS$  en un point  $\Sigma$ .

Si l'on considère ce point  $\Sigma$  comme le sommet commun de deux cônes ayant pour bases les deux cercles  $O$  et  $O''$ , et qu'on fasse rouler le deuxième cône ( $\Sigma O''$ ) sur le premier ( $\Sigma O$ ), un point de la circonférence  $O''$  décrira une courbe à double

courbure  $mm''$ , une *épicycloïde sphérique*, située sur la sphère sur laquelle se meut le cercle  $O''$  lui-même, sphère ayant son centre en  $\Sigma$ .

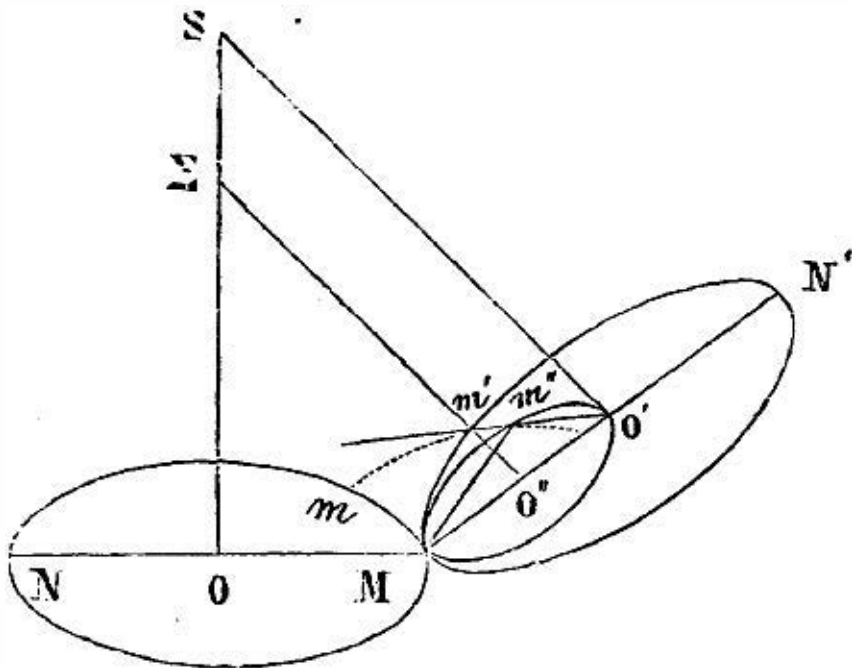


Fig. 236.

Que par cette épicycloïde on fasse passer un cône qui ait le point  $S$  pour sommet; ce cône sera la surface enveloppe d'un plan diamétral du cône  $SO'$ , et devra par conséquent être pris pour la surface des dents du cône  $SO'$ . Ce résultat paraît évident d'après la similitude de la construction employée avec celle usitée pour les engrenages cylindriques; nous allons prouver au reste que toutes les conditions du problème sont satisfaites.

Soit  $mm''$  l'arc d'épicycloïde sphérique décrit par le point  $m''$  du cercle  $O''$ , à partir du moment où il toucherait le cercle  $O$  en  $m$ , de telle sorte que l'on ait  $\text{arc } Mm'' = \text{arc } Mm$ .

Prenons sur le cercle  $O'$  l'arc  $Mm' = \text{arc } Mm$ , je dis que le plan  $SO'm'$ , qui passe par le point  $m''$ , est tangent en ce point à l'épicycloïde, d'où il suivra qu'il est tangent au cône qui a le point  $S$  pour sommet, et pour base l'épicycloïde.

En effet la droite  $Mm''$ , passant par le centre de rotation instantanée  $M$ , est normale à l'épicycloïde en  $m''$ . La droite  $O'm''$  est perpendiculaire sur la droite  $Mm''$ , car l'angle  $Mm''O'$  de ces deux droites est inscrit dans la demi-circonférence du cercle  $O''$ .

La droite  $O'S$  fait un angle droit avec la droite  $Mm''$ , puisqu'elle est perpendiculaire au plan du cercle  $O''$ .

Donc le plan  $SO'm''$  passe par deux droites  $SO'$  et  $O'm''$  perpendiculaires à la droite  $Mm''$ , donc il est perpendiculaire à cette droite; or cette droite est une normale à l'épicycloïde.

Donc le plan  $SO'm''$  est tangent à l'épicycloïde, et par suite à la surface conique, qui a son sommet en  $S$  et qui s'appuie sur l'épicycloïde. Le plan  $Sm''M$  est le plan normal commun au cône  $SE$  et au plan diamétral  $SO'm''$ .

Donc le plan normal commun aux deux dents en contact passe par l'arête de contact  $SM$  des deux cônes  $SO, SO'$ .

Il suit de là que, si cette surface que je désigne par  $SE$  est la dent du cône  $SO$ , cette dent poussera le plan diamétral  $S'O'm'$  du cône  $SO'$ , et le fera tourner autour de l'axe  $SO'$ .

Il reste à prouver que la rotation de ce plan diamétral, et par conséquent du cône  $SO'$ , est proportionnelle à la rotation du cône  $SO$ .

Cela résulte de ce que l'arc  $Mm'$  déterminé par la droite  $O'm''$  sur la circonférence  $O$  est égal à l'arc  $Mm$ .

En effet la circonférence  $O''$  ayant pour diamètre le rayon  $MO'$  de la circonférence  $O'$ , on a, comme nous l'avons déjà vu dans l'engrenage à flancs,  $\text{arc } Mm' = \text{arc } Mm''$ . Donc  $\text{arc } Mm' = \text{arc } Mm$ . Or les rotations des deux cônes sont mesurées respectivement par  $\frac{\text{arc } Mm}{R}$  et  $\frac{\text{arc } Mm'}{R'}$ . Elles sont en raison inverse des rayons  $R$  et  $R'$  des deux cercles  $O$  et  $O'$ , et conséquemment en raison inverse des sinus des angles au sommet des deux cônes.

269. *Engrenage conique à développantes.* — En transportant au cas qui nous occupe les raisonnements qui nous ont conduit à l'emploi des développantes pour le profil des engrenages cylindriques, on construira dans les mêmes conditions un engrenage conique à développantes.

Étant donné l'angle de deux axes,  $OE, OF$  (fig. 237) se rencontrant au point  $O$ , imaginons autour de chacun d'eux une

surface conique dont le sommet soit au point  $O$ , et la base un petit cercle d'une sphère ayant ce même point pour centre; ces deux cônes seront représentés sur la figure par les triangles isocèles  $AOB$ ,  $COD$ ; prenons ces bases en raison inverse des vitesses  $\omega$  et  $\omega'$ , de manière qu'elles satisfassent à la condition  $R\omega = R'\omega'$ .

La communication du mouvement serait évidemment établie dans les conditions voulues, en supposant le frottement suffisant, par un grand cercle de la sphère tangent aux deux bases, renfermé dans un plan tangent aux deux cônes.

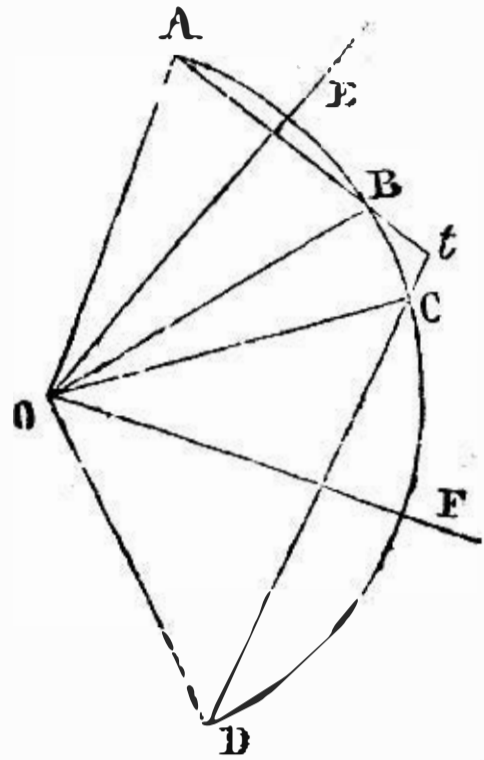


Fig. 237.

Si maintenant on suppose que ce grand cercle s'enroule successivement sur chacun des cercles des bases des deux cônes, un point quelconque de ce grand cercle décrira sur la sphère deux courbes à double courbure dites *développantes sphériques*. Ces courbes, considérées comme des dents sans épaisseur, seront propres à transmettre le mouvement aux deux cercles comme par enroulement et déroulement d'un grand cercle. Pour donner de l'épaisseur à ces dents, il suffit d'imaginer qu'un rayon de la sphère parcourt leur courbure et de prendre la longueur que l'on voudra de la surface conique ainsi engendrée. Le développement de ces surfaces a lieu en même temps que celui de leurs traces sur la sphère. Elles conviennent donc à la reproduction du mouvement pendant lequel elles sont engendrées, et la pression s'exerce normalement aux surfaces de contact et toujours à la même distance de l'axe; en un mot l'engrenage jouit de toutes les mêmes propriétés que l'engrenage cylindrique à développantes.

270. Nous ne nous arrêterons pas ici sur les engrenages doublement épicycloïdaux qui se construiraient comme les précédents; en chaque instant l'épicycloïde du cercle roulant au point de



contact se confondant avec sa tangente en ce point, ce que nous venons d'établir précédemment, quand l'épicycloïde intérieure se confond avec la tangente, est une droite, s'appliquant également à ce cas.

271. *Construction pratique des engrenages coniques.* — D'après ce qui précède, toutes les lignes qui entrent dans les engrenages coniques étant définies, ce n'est plus qu'une application des principes de la géométrie descriptive d'en déduire tous panneaux et les tracés nécessaires pour la construction. Mais il est inutile d'entrer dans des détails étendus à cet égard, vu que, dans la pratique, on a adopté une méthode simple et suffisamment exacte. Nous ne parlerons en l'exposant que de l'engrenage à flancs, mais tout ce que nous dirons peut s'appliquer également aux autres engrenages.

Nous avons décrit l'épicycloïde sphérique par laquelle passe la

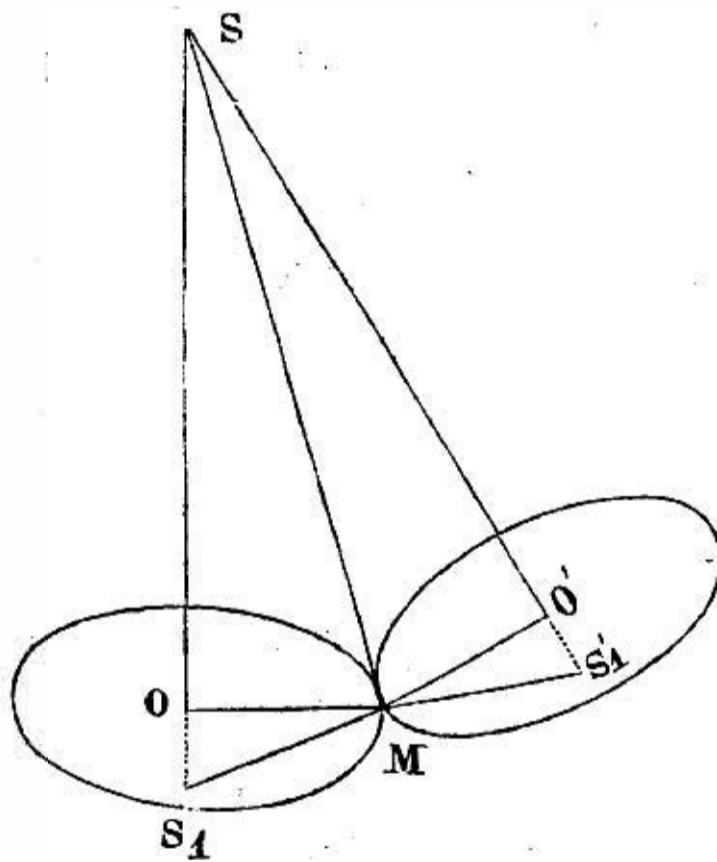


Fig. 238.

surface conique qui doit former les dents de la roue O. Dans la pratique, ce n'est pas par cette courbe même qu'on termine cette surface conique, car les arêtes du cône ainsi déterminées seraient d'inégale longueur (puisque le centre du cône qui décrit l'épicycloïde n'est pas au point de rencontre des deux axes; cela a lieu pour l'engrenage à développantes : aussi la solution approchée

que nous allons exposer est moins inexacte dans ce cas). On termine cette surface conique par la courbe qui résulte de son intersection avec un deuxième cône ayant son sommet  $S$ , sur l'axe  $OS$  (fig. 238) et passant par le cercle  $O$ , le point  $S$ , étant déterminé par la rencontre de l'axe  $SO$  avec la perpendiculaire à l'arête  $SM$  au point  $M$ . Pareillement pour le cône  $SO'$ .

Les deux cônes  $(S,)$   $(S',)$  ont une arête commune, la droite  $S,MS'$ , et un plan tangent commun suivant cette droite. Ils coupent respectivement les deux surfaces qui forment les dents des deux roues que j'appelle  $(S, E)$   $(S', E')$ . Si on détermine les deux courbes d'intersection et qu'on développe les deux cônes  $S, S'$ , sur leur plan tangent commun, passant par  $S,MS'$ , les courbes d'intersection en question se développeront sur ce plan, et on obtiendra, en les relevant, les panneaux nécessaires pour la construction exacte des cônes  $(SE)$ ,  $(SE')$ .

272. Ainsi que nous l'avons déjà dit, on remplace cette construction par une méthode plus simple qui donne une approximation suffisante.

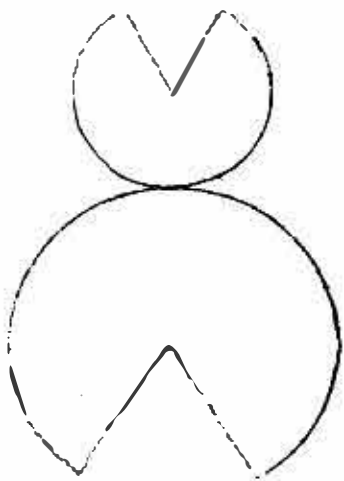


Fig. 239.

Dans le développement du cône  $S,$ , la circonférence  $O$  (fig. 236) deviendra un arc de cercle de même longueur que cette circonférence. La courbe provenant de l'intersection du cône  $S,$  par le cône épicycloïdal  $SE$ , si on la considère dans une faible étendue, sera dans le plan tangent au cône suivant l'arête  $S, M$ .

Pareillement le cône  $S'$ , développé donnera un arc de cercle égal à la circonférence  $O'$ ; la courbe provenant de l'intersection de ce cône  $S'$ , par le cône  $SE'$  qui forme la dent de la roue  $O'$ , dans une petite longueur (qui sera presque leur longueur totale si le nombre des dents est très-grand, si par suite elles sont petites) sera dans le même plan; il s'ensuit que le tracé des parties qui traversent successivement la ligne de contact doit se rapprocher extrêmement de celui de profils de dents qui ap-

partiendraient à un engrenage plan construit sur ces deux axes comme cercles primitifs.

C'est cet engrenage plan que l'on trace sur une carte flexible que l'on applique ensuite sur les deux cônes  $S, S'$ , pour former l'engrenage conique, dont le tracé se réduit ainsi à celui d'un engrenage plan, sur des surfaces développées que la flexibilité du papier permet d'appliquer ensuite sur les cônes; enfin, pour achever la construction, il suffit de faire passer par la courbe tracée des arêtes se dirigeant vers le sommet du cône.

273. *Engrenages à lanterne.* — Nous n'avons parlé dans ce qui précède que de deux des solutions pratiques, traitons aussi l'autre solution du problème des engrenages que nous avons étudiée précédemment, dans le cas où elle est possible, celui où les axes sont à angle droit.

Soient deux roues inégales, et dont les axes se croisent à angle droit, l'une des roues portant des fuseaux cylindriques, l'autre doit porter des allachons d'une forme particulière. Voyons comment on peut la déterminer.

Soit  $C$  le centre de la roue qui porte les fuseaux cylindriques

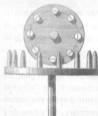


Fig. 184

et supposons d'abord les fuseaux réduits à leurs axes;  $PA P$ , est la circonférence primitive qui passe par les centres des fuseaux, et  $p n A$  la projection du cercle primitif des allachons de la grande roue que d'on voit en plan (fig. 241). Soient enfin  $P$  un fuseau et  $w$  l'axe du solide de révolution avec lequel il est en prise,  $p P f$  la courbe génératrice de ce solide de révolution dont on voit une section

sur le plan au niveau de  $P^n$ .

Posant  $AC = r$ ,  $at = R$ ,  $wa t = \varphi =$  distance angulaire de  $f w$  sur le plan des centres,  $\angle C P = \theta$ ,  $\mu n N = x$ ,  $N P a = y$ ,  $w P = \rho$ , on a :

$$y = r \sin. \theta \text{ vers. } \theta$$

$$x = P n - A n = r \sin. \theta - R \sin. \varphi.$$

Les vitesses aux circonférences devant être égales et les points  $p$  et  $P$  coïncider en  $A$ , l'arc  $AP$  doit être égal, sur le plan vertical, à l'arc  $t m$  sur le plan horizontal, augmenté du rayon  $m p$  de la base, au moins à très-peu près; donc

$$\varphi = \frac{r\theta - \rho}{R} \text{ et } x = r \sin \theta - R \sin. \left( \frac{r\theta - \rho}{R} \right).$$

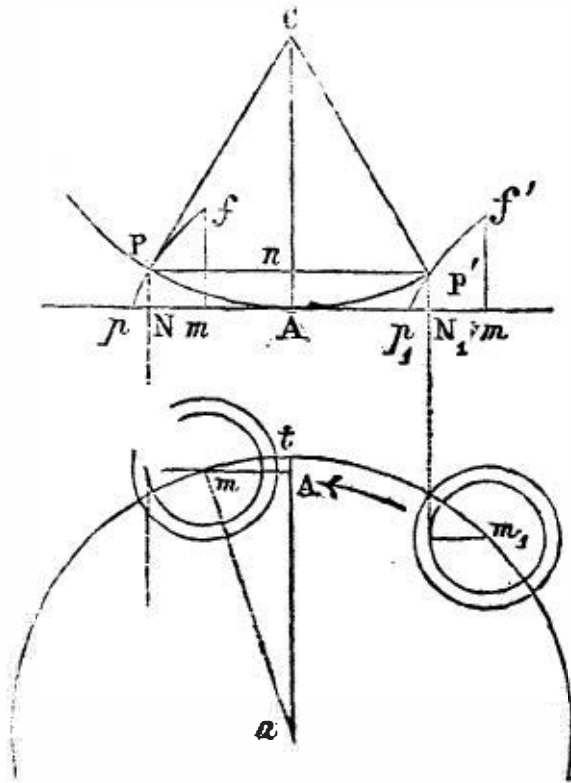


Fig. 241.

Ces valeurs de  $x$  et  $y$  permettent de tracer par points la courbe  $p P f$ , et, en rendant au fuseau son diamètre réel, la courbe de l'alluchon devra être reculée d'une distance égale au rayon du fuseau cylindrique.

L'alluchon  $p P f$ , en supposant qu'il conduise, se meut nécessairement dans la direction de la flèche et s'éloigne du plan des centres. Si l'on considère maintenant le fuseau  $P_1$ , et l'alluchon  $p_1 P_1 f_1$ , pendant leur approche de l'autre côté du plan des centres à une distance angulaire  $\theta$  égale à la première, la valeur de  $y$  reste la même; mais on a  $\varphi_1$  étant égal à  $m_1 a t$ ,

$$x_1 = R \sin. \varphi_1 - r \sin. \theta \text{ et } \varphi_1 = \frac{r\theta + \rho}{R},$$

ou  $R \varphi_1 - r\theta = \rho_1$ , au lieu de  $\rho = r\theta - R \varphi$ .

D'après ces valeurs, comme on voit sur la figure que  $\rho_1 < \rho$  ou  $R \sin. \varphi_1 - r \sin. \theta < r \sin. \theta - R \sin. \varphi$ ; dès lors  $x_1 < x$ .

La courbe  $p_1 P_1 f_1$  n'est donc pas la même que  $p P f$ , mais elle

en est bien voisine et est comprise dans celle-ci. Elle doit être adoptée, mais alors l'action ne se produira régulièrement qu'autant que le fuseau sera placé entre l'alluchon et le plan des centres. Or comme il convient que l'action s'exerce plutôt après le plan des centres qu'en deçà, il s'ensuit que c'est la roue conduite qui doit toujours recevoir les alluchons, les fuseaux cylindriques devant toujours être donnés à la roue qui mène. La fig. 241 montre que le lieu du contact des alluchons d'un côté du plan des centres, comme en  $w$ , est compris à très-peu près dans la partie de l'alluchon qui est intérieure à la circonférence primitive, tandis que de l'autre côté du plan des centres, comme en  $w'$ , le lieu de contact est compris dans la moitié qui est extérieure. On pourrait donc obtenir une action régulière de l'un et de l'autre côté du plan des centres en faisant la partie intérieure de l'alluchon, et la partie extérieure suivant les formes qui leur conviennent, ce qui montre la possibilité pour les roues de champ de transmettre leurs vitesses angulaires dans un rapport constant.



Fig. 242.

272. Si les deux roues sont égales  $r = R$ , on voit qu'en déplaçant l'axe de la roue inférieure d'un rayon du fuseau adapté à la roue verticale, les valeurs de  $\varphi$  et  $\theta$  seront les mêmes, et  $x =$  rayon du fuseau sera une quantité constante égale à  $r$ , c'est-à-dire que deux séries de fuseaux cylindriques peuvent se conduire, système représenté fig. 242.

Ces systèmes ont le grave inconvénient que le contact n'a lieu qu'en un seul point, que le glissement s'opère sur des arêtes; aussi on ne les emploie plus aujourd'hui, ou tout au plus dans des machines où l'on ne transmet que des forces minimes.

Pour un angle différent d'un angle droit, la construction précédente ne serait plus suffisante, et il faudrait déterminer directement l'enveloppe du fuseau. Il n'y a aucune raison, dans ce cas,

de chercher une forme plus compliquée que celle qui convient aux engrenages épicycloïdaux.

275. *Glissement.* — La considération des axes instantanés de rotation employée pour l'étude du mouvement de deux corps, comme celle des centres instantanés de rotation pour celui de figures dans un plan (art. 23), permet d'arriver facilement à la formule qui donne l'étendue du glissement (1). Pour trouver le mouvement relatif élémentaire de la roue  $O'$ , par rapport à la roue  $O$  (fig. 243), nous pouvons supposer qu'on applique à l'ensemble des deux roues  $O, O'$  un mouvement commun égal et contraire au mouvement de la roue  $O$ . Cette roue sera réduite au repos, et la roue  $O'$  sera animée à la fois d'une vitesse angulaire  $\omega$  autour de  $SN$  et d'une vitesse angulaire  $\omega'$  autour de l'axe  $S N'$ . Mais ces deux rotations simultanées équivalent à une rotation unique, qui se fera autour de la génératrice de contact des cônes primitifs (car l'axe instantané de rotation passera évidemment par le sommet  $S$ , qui n'est déplacé par aucune de ces rotations, et par le point  $A$ , centre instantané de la rotation de la courbe de la base). Il suit de là que la vitesse  $\Omega$  de cette rotation résultante sera représentée par la diagonale  $SH$ , si les côtés  $SF, SG$  sont pris de manière à représenter les vitesses composantes  $\omega$  et  $\omega'$ .

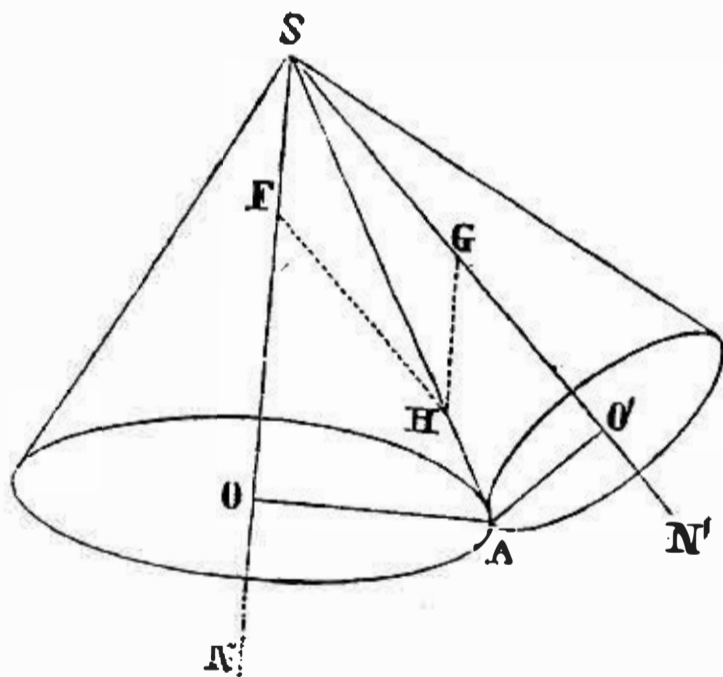


Fig. 243.

En effet, si nous menons du point  $G$  deux perpendiculaires  $GT, GR$  sur les axes de rotation  $SN, SA$ , le déplacement élémentaire du point  $G$  autour de  $SN$  sera  $GR \times \omega$ , et ce sera sa rotation totale puisqu'il ne se déplace pas autour de  $SN'$ ; d'un autre côté,  $SA$  étant l'axe instantané de rotation et  $\Omega$  la vitesse résultante, le déplacement élémentaire de  $G$  aura aussi pour expression  $\Omega \times GT$ ; donc :  $GR \omega = GT \Omega$ .

(1) Delaunay, *Mécanique*.

D'un autre côté, les triangles  $S F H$  et  $S G H$  sont égaux, donc leurs surfaces sont égales, ou  $S F \times G R = S H \times G T$ ; donc enfin  $\frac{\Omega}{\omega} = \frac{S H}{S F}$ , donc  $S F$  représentant  $\omega$ ,  $S H$ , ou la diagonale, représentera  $\Omega$ .

Appelant  $\alpha$  l'angle  $O S A$  (1/2 angle du cône),  $\alpha'$  l'angle  $O' S A$ , on aura :

$$S H = S F \cos. \alpha + S G \cos. \alpha', \text{ et aussi :}$$

$\Omega = \omega \cos. \alpha + \omega' \cos. \alpha'$ , et la valeur de l'angle décrit pendant un temps extrêmement court  $dt$ , sera :

$$(\omega \cos. \alpha + \omega' \cos. \alpha') dt.$$

Désignant par  $p$  la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point  $M$  dont on veut évaluer le glissement, sur l'axe instantané de rotation  $S A$ , on aura :

$$p (\omega \cos. \alpha + \omega' \cos. \alpha') dt$$

pour le glissement élémentaire de ce point  $M$ . Désignons par  $ds$  l'arc infiniment petit de chacune des circonférences  $O A$ ,  $O' A$  qui traverse le plan  $NSN'$  pendant le temps  $dt$  et par  $r, r'$  les rayons  $O A$ ,  $O' A$  de ces circonférences, comme  $r \omega dt = r' \omega' dt = ds$  l'expression du glissement élémentaire du point  $M$  deviendra :

$$p \left( \frac{1}{r} \cos. \alpha + \frac{1}{r'} \cos. \alpha' \right) ds.$$

276. *Frottement dans les engrenages coniques.* — Dans les engrenages coniques exécutés avec soin, on a toujours l'attention de faire les dents, et par suite le pas aussi petit que possible, de sorte que le mouvement et le glissement des dents l'une sur l'autre ont sensiblement lieu comme s'ils se passaient dans le plan tangent aux deux surfaces coniques et normalement à la longueur des dents.

$Q$  étant l'effort transmis à la circonférence de contact,  $f$  le coefficient de frottement, le glissement a été trouvé pour un

arc  $dsa$ : 
$$p \left( \frac{1}{R} \cos. \alpha + \frac{1}{R'} \cos. \alpha' \right) ds$$

appelant  $\alpha$  et  $\alpha'$  les demi-angles au sommet des deux cônes  $S, S'$ , on aura :  $\alpha + \alpha' = 180^\circ - \delta$ ,  $\delta$  étant l'angle des deux

axes. L'expression du frottement pour un arc  $ds$  et un effort agissant à une distance à partir du point de contact, dont la valeur moyenne  $p$  est  $\frac{a}{2}$ ,  $a$  étant le pas de l'engrenage, deviendra

donc :

$$fQ \frac{a}{2} \left( \frac{\cos. \alpha}{R} + \frac{\cos. \alpha'}{R'} \right) ds.$$

L'expression entre parenthèses revient à :

$$\sqrt{\left( \frac{\cos. \alpha}{R} + \frac{\cos. \alpha'}{R'} \right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} + \frac{2 \cos. \alpha \cos. \alpha'}{R R'} - \frac{\sin.^2 \alpha}{R^2} - \frac{\sin.^2 \alpha'}{R'^2}},$$

or  $\cos. 180^\circ - \delta = -\cos. \delta = -\cos. \alpha \cos. \alpha' + \sin. \alpha \sin. \alpha'$  ;  
de plus comme  $l$  est la génératrice du contact,  $l \sin. \alpha = R$ ,  
 $l \sin. \alpha' = R'$  et que par suite  $\frac{\sin. \alpha}{R} - \frac{\sin. \alpha'}{R'} = 0$ , l'expression  
ci-dessus revient à :

$$\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} - \frac{2 \cos. \delta}{R R'}};$$

donc enfin, comme  $R : R' = n : n'$  et  $a = \frac{2 \pi R}{n}$ , la valeur du travail du frottement pour un arc  $s$ , en faisant entrer dans son expression le nombre de dents, peut se mettre sous la forme :

$$T_f = fQ \pi s \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2} - \frac{2 \cos. \delta}{n n'}}.$$

Or,  $Qs$  est le travail dû à la résistance  $Q$  pendant le mouvement de la roue; représentons-le par  $T_r$ , on a enfin :

$$T_f = T_r f \pi \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2} - \frac{2 \cos. \delta}{n n'}}.$$



## II. AXES NE SE RENCONTRANT PAS.

ORGANES AGISSANT PAR CONTACT IMMÉDIAT AVEC FROTTEMENT  
DE ROULEMENT.

277. Pour trouver les surfaces qui pourraient dans ce cas servir, adaptées aux axes, à les faire mouvoir l'un par l'autre, de telle sorte que le rapport des vitesses fût constant et qu'il ne se produisît pas de glissement, mais seulement un roulement, nous reprendrons les considérations relatives au roulement, exposés au début (art. 23 et suiv.).

Nous avons vu (art. 23) que les propositions relatives aux centres instantanés de rotation de courbes sur courbes situées dans un même plan, s'appliquent à une figure sphérique mobile sur la sphère où elle est placée, et qu'elle peut également être amenée d'une quelconque de ses positions à une autre, par un mouvement de rotation autour d'un point de la sphère comme pôle, ou, ce qui est la même chose, par un mouvement de rotation autour d'un diamètre de la sphère comme axe; qu'il en est de même de tout mouvement élémentaire d'une figure sphérique sur la sphère, et que tout mouvement élémentaire d'un solide dont un point reste immobile est une rotation autour d'un axe instantané passant par ce point.

Lorsqu'une courbe mobile roule sur une courbe immobile, soit que ces courbes existent seules, soit qu'elles se trouvent tracées sur les surfaces de deux solides qui roulent l'un sur l'autre, il est clair que le point de contact des deux courbes, considéré comme appartenant à la courbe mobile, reste en repos pendant un intervalle de temps infiniment petit; le mouvement élémentaire de la courbe mobile ou du solide auquel elle appartient doit donc être une rotation autour d'un axe passant par ce point de contact. Il résulte de là que, si un solide en mouvement touche constamment un solide immobile par plusieurs points, et s'il ne se produit qu'un roulement du premier solide sur le second en chacun de ces points de contact, le mouvement élé-

mentaire du solide mobile est à chaque instant une rotation autour d'un axe passant par ses divers points de contact avec le solide immobile; et que, par conséquent, tous ces points sont nécessairement en ligne droite. Donc, pour qu'un solide puisse rouler d'une manière continue sur un autre solide immobile, le contact ayant lieu en un nombre infini de points nécessairement en ligne droite, il faut que les surfaces de ces deux solides soient des surfaces *réglées*.

Ce résultat obtenu en considérant le roulement absolu est directement applicable au cas du mouvement relatif, puisqu'un pareil roulement peut toujours être ramené à un roulement absolu des mêmes solides, en imprimant à tout le système des deux corps, un déplacement égal et directement opposé à celui de l'un d'eux, ainsi ramené au repos.

278. Étant démontré que les surfaces qui peuvent convenir sont des surfaces réglées, il est facile de voir que la solution du problème, pour un rapport de vitesse constant, ne peut se trouver que dans l'emploi de deux hyperboloïdes de révolution engendrés par une même droite tournant successivement autour de chacun des axes. On sait que cette surface est engendrée par une droite qui ne rencontre pas un axe autour duquel elle tourne, et auquel elle n'est pas parallèle. Deux surfaces de cette nature E, F (fig. 244) tournant autour de leurs axes Aa, Bb,

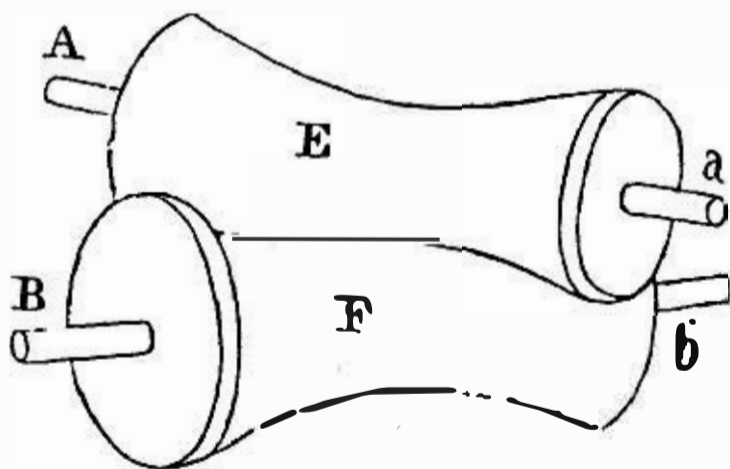


Fig. 244.

se conduiront par simple contact; celui-ci a toujours lieu le long d'une génératrice commune aux deux surfaces; le changement de contact correspond au déplacement de la génératrice

commune lorsque chacun des axes décrit des rotations dans un rapport donné. Tout ceci va paraître très-clair en cherchant à construire le système dont il s'agit.

279. Soient  $A B$ ,  $C D$  deux axes de rotation (fig. 245),  $a b$ ,  $c d$  leurs projections sur un plan parallèle à tous deux ;  $g k$  leur perpendiculaire commune (leur plus courte distance) projetée en  $M$  ;  $E F$  une ligne qui coupe  $g k$  en  $h$ , parallèle au plan sur lequel elle est projetée suivant  $e f$ . La ligne  $E F$  en tournant autour de  $A B$  engendrera un hyperboloïde, et en tournant autour de  $C D$  un autre hyperboloïde ;  $E F$  sera par suite une ligne commune à ces deux surfaces.

D'un point quelconque  $E$  de cette ligne, abaissons les perpendiculaires  $E A$ ,  $E C$  sur  $A B$  et sur  $C D$ , les lignes  $A E$ ,  $E C$ , qui se projettent suivant  $a e$ ,  $c e$ , seront les rayons de deux cercles des deux hyperboloïdes ayant un point  $E$  commun.

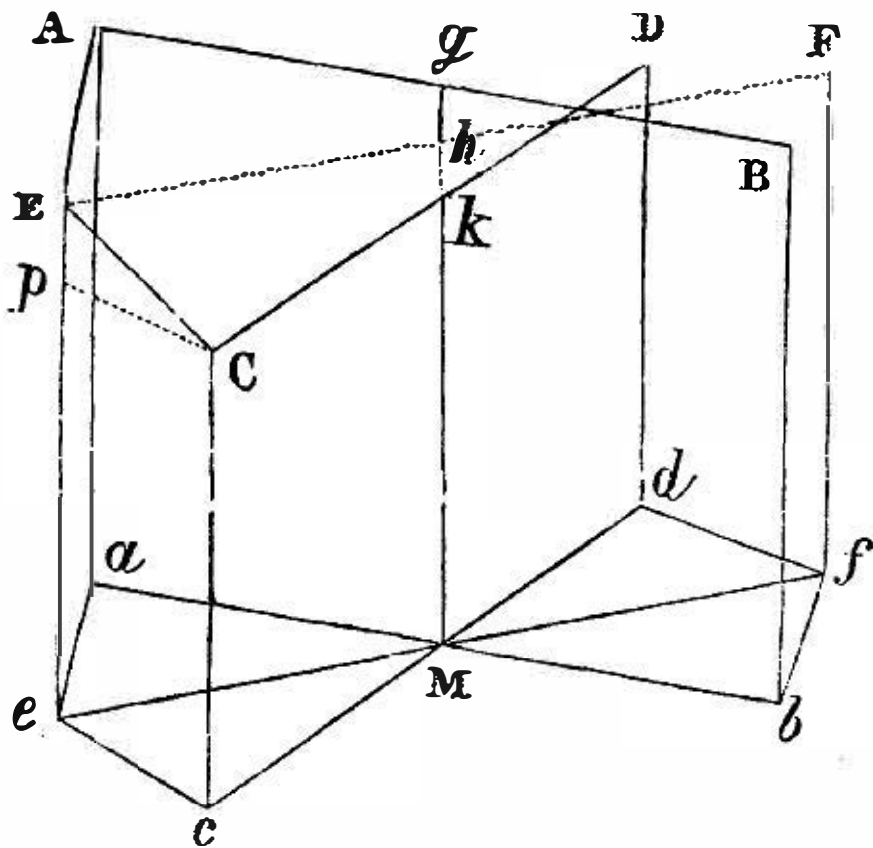


Fig. 245.

Menant  $C p$  parallèle à  $c e$ , on aura  $E p = h k$  et  $C p = c e$ ,

$$\text{d'où } \overline{E C}^2 = \overline{E p}^2 + \overline{C p}^2 = \overline{h k}^2 + \overline{c e}^2$$

On trouverait de même :  $A E^2 = g h^2 + a e^2$  ; si donc on a tracé la projection  $e f$  de telle sorte que l'on ait  $\frac{c e}{a e} = \frac{h k}{g h}$ , on

aura encore d'après les égalités ci-dessus  $\frac{EC}{EA} = \frac{hk}{gh}$ , par conséquent les distances de tout point de la ligne EF aux deux axes seront dans un rapport constant, et par suite pour une rotation de chacun d'eux en rapport inverse des rayons, des longueurs égales des deux circonférences, dont ces distances sont les rayons, passeront à tous les points communs. Il n'y aura donc que changement de génératrice commune, et la vitesse angulaire  $= \frac{r}{R}$ ,  $r$  et  $R$  correspondant aux rayons des cercles de gorge des hyperboloïdes. On pourra donc facilement déterminer la projection  $ef$  et par suite la position d'une ligne EF pour un rapport de vitesses donné; et les deux axes qui porteront les deux hyperboloïdes qu'elle engendre pourront se mouvoir par contact dans ce rapport de vitesses.

Mais tandis que pour le cas des cônes, les circonférences de chaque paire de cercles qui se correspondent, bien que n'étant pas dans le même plan, se meuvent de telle sorte que les rayons qui passent par le point de contact soient perpendiculaires à la ligne d'intersection des deux plans qui renferment les cercles, et que par suite les deux tangentes au point de contact coïncident avec cette ligne, il n'en est plus ainsi dans le cas des hyperboloïdes.

Les cercles dont les rayons sont CE. AE se trouvent dans des plans dont l'intersection est la ligne Ee; les tangentes à ces cercles au point E ne coïncident nullement avec cette ligne ni avec aucune autre, elles sont distinctes; il n'y a plus en réalité roulement, mais rencontre de point successifs des cercles. Si la distance  $gh$  est petite, les hyperboloïdes se rapprochent beaucoup d'une paire de cônes dont le sommet commun serait en  $h$ .

280. Dans la pratique, dit encore M. Willis, dans le cas qui nous occupe, comme dans celui des cônes, on n'a besoin que de petites parties de la surface de chaque hyperboloïde, et on peut sans erreur sensible leur substituer une partie de la sur-

face du cône tangent au point milieu, qui peut être déterminé de la manière suivante :

Soit  $CK$  l'axe de l'hyperboloïde,  $CK = NP = y$  la moyenne

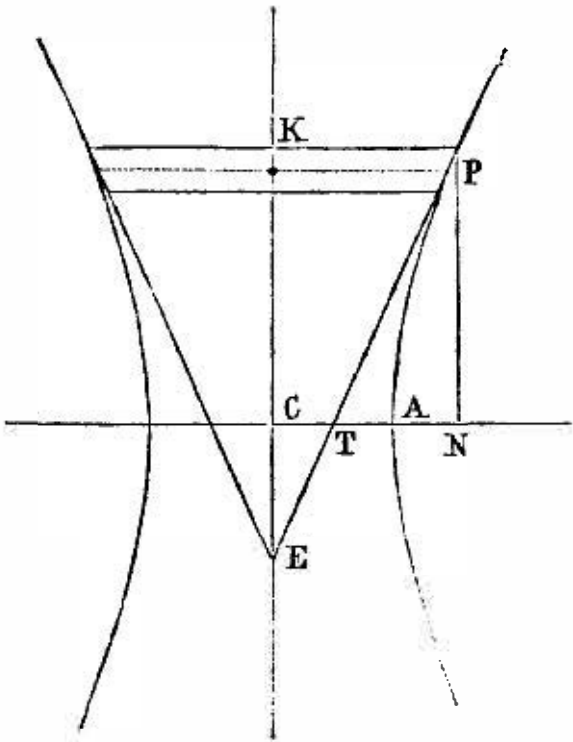


Fig. 246.

distance au plan  $C$  passant par le centre de la partie considérée;  $KP = CN$ , la distance à l'axe  $CK$ , le rayon;  $CA = a$  le rayon du centre de gorge de l'hyperboloïde et le demi-axe de l'hyperbole génératrice  $PAP'$ , éléments déterminés par la construction précédente, dans laquelle  $AE$ ,  $EC$  représenteront le rayon moyen,  $g$ ,  $k$  les centres des hyperboles génératrices, et  $gh$ ,  $hk$  leurs demi-axes.

Soit  $PTE$  la tangente en  $P$ , on a, d'après les propriétés connues de l'hyperbole,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2) \text{ et } CE = \frac{b^2}{y}.$$

Cette valeur de  $CE = \frac{a^2 y}{x^2 - a}$  donne le sommet  $E$  du cône dont la base est  $KP$ .

281. D'après ce qui précède, la transmission du mouvement entre deux axes qui ne se rencontrent pas, et ne sont pas parallèles, peut théoriquement avoir lieu comme dans le cas qui a été précédemment étudié, et la solution générale être appliquée, si l'adhérence au contact suffisait pour surmonter la résistance à vaincre. Si elle ne peut suffire, on peut encore (au moins théoriquement, car les difficultés du tracé de ces engrenages les rendent peu admissibles dans la pratique) construire des engrenages à frottement de roulement dont les dents ne se touchent qu'en un point, d'après les principes déjà exposés pour d'autres positions des axes de rotation. Il faut pour cela enrouler sur les deux hyperboloïdes une même courbe par la rotation de ces surfaces

dans le rapport de vitesse voulu, puis habiller ces courbes de manière qu'elles se trouvent sur des surfaces se touchant par ces courbes, de telle sorte que celles-ci ne puissent échapper.

Prenant pour la ligne à enrouler une ligne droite, la courbe d'enroulement se rapproche de celles étudiées précédemment pour les autres cas. M. Olivier, en les réunissant par un mode de génération commun, les a classées en développantes plane, cylindrique, conique ou hyperboloidique, suivant qu'elles sont tracées sur un plan, un cylindre, un cône ou un hyperboloïde de révolution.

282. Soit A un axe vertical (fig. 247), P un plan perpendiculaire à cet axe le coupant en un point  $o$ , traçons dans le plan P un cercle de rayon  $\rho$  ayant son centre en  $o$ .

Soit F un fil enroulé sur ce cercle, et au point où le fil se sépare du cercle, imaginons un anneau glissant sur ce cercle et qui permet à l'extrémité libre du fil de prendre diverses direc-

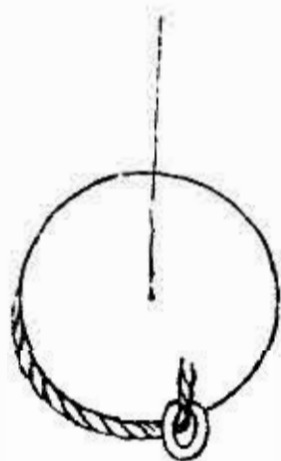


Fig. 247.

tions. Si l'on donne un mouvement de rotation autour de l'axe :

1° La partie libre du fil restant dans le plan P et tangente au cercle, un point de ce fil tracera une développante du cercle.

2° La partie libre du fil restant dans le plan P et coupant le rayon qui passe par le point d'attache sous un angle constant, un point du fil tracera une développante du cercle qui a pour rayon la perpendiculaire abaissée du centre  $o$ , sur la direction du fil.

3° La partie libre du fil étant tendue le long de la génératrice d'un cône droit passant par le cercle, l'extrémité décrira une spirale hélicoïdale dont la projection sur le plan P est une spirale d'Archimède ( $\rho = a \omega$ ). La longueur du fil restant la même pour chaque tour, l'élément hélicoïdal sera d'autant plus incliné sur la génératrice que la section du cône sera moindre, que le point décrivant se rapprochera davantage du sommet. C'est bien l'effet que donneraient des roues d'angle considérées comme formées

de plans superposés, si on les faisait tourner ceux-ci de quantités égales pour supprimer le glissement, en raisonnant comme précédemment.

4° La partie libre du fil étant tendue le long de la génératrice d'un cylindre droit passant par le cercle, son extrémité décrira une hélice cylindrique.

5° Enfin si la surface sur laquelle se meut le fil est engendrée par la révolution d'une droite faisant avec la ligne  $A$  qu'elle ne rencontre pas un angle  $\delta$ , la surface sera un hyperboloïde de révolution, et la ligne tracée par un point du fil appliqué successivement le long des génératrices rectilignes, une *développante hyperboloïdique circulaire*.

Il est évident que dans le cas des hyperboloïdes, cette ligne ne pourrait plus être remplacée par une droite tracée dans un même plan tangent commun aux deux surfaces (puisque pour une génératrice commune les deux plans sont distincts); le tracé des dents offrira par suite des difficultés, que l'on n'abordera guère dans la pratique, surtout lorsque la solution indirecte par une roue intermédiaire permet une solution facile du problème par l'emploi des engrenages coniques, ainsi que l'a montré M. Poncelet.

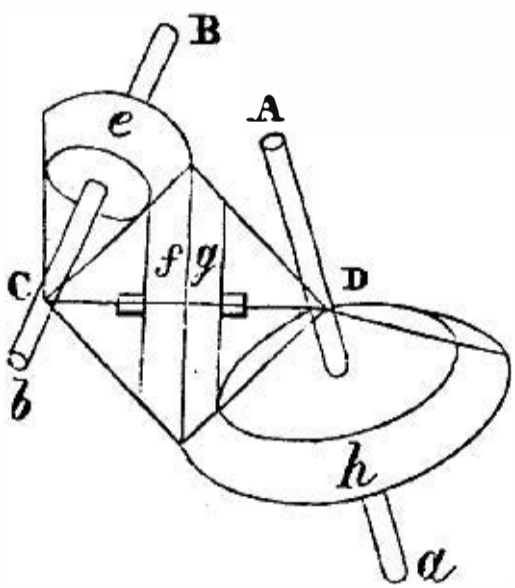


Fig. 248.

283. En effet, soient  $Aa$ ,  $Bb$  deux axes (fig. 248); prenez une ligne convenablement disposée qui rencontre les deux axes en  $C$  et en  $D$ , et servez-vous-en comme d'un troisième axe jouant le même rôle que les deux premiers.

Une paire de cônes de roulement  $e, f$ , ayant leur sommet en  $C$ , sans qu'il soit nécessaire qu'ils soient accolés, et une autre paire  $g, h$ , ayant leur sommet en  $D$ , se mèneront par simple roulement, et finalement la rotation de  $Bb$  sera communiquée à  $Aa$  par simple roulement.

Soient  $A, A_1, a$  les vitesses angulaires respectives des axes  $Bb$ ,

C D,  $A a$ , et  $B, R_1, r$  les rayons des bases de ces cônes on aura :

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{R_1} \text{ et } \frac{A}{a} = \frac{r}{R_1}, \text{ d'où } \frac{A}{a} = \frac{r}{R_1}$$

exactement comme si les cônes  $a$  et  $b$  pouvaient agir par contact immédiat d'un sur l'autre.

MOUVEMENT AJOUTÉ PAR CONTACT ET AVEC FROTTEMENT  
OU GLISSEMENT.

284. La solution théorique, fondée sur les principes généraux que nous avons exposés, est toujours possible, et le premier hyperboloïde portant une dent d'une certaine forme, si le deuxième est muni d'une dent qui soit l'enveloppe de toutes les positions de la première, le mouvement aura lieu comme si les deux hyperboloïdes se mouvaient dans les conditions voulues, c'est-à-dire que les vitesses de rotation des deux axes seraient dans le rapport voulu.

Pratiquement, si l'on munit les cercles primitifs de dents de peu d'étendue dont les faces soient tracées suivant les génératrices des hyperboloïdes passant par un ou de leurs points, elles agiront l'une sur l'autre sensiblement dans les



Fig. 218

conditions voulues; des génératrices qui agiront l'une sur l'autre ayant évidemment la direction convenable. Cette construction se retrouve dans quelques machines, mais l'exécution complète de l'épure qui donnerait le tracé exact des dents offrirait des difficultés trop grandes dans la pratique.

En réalité, la pratique emploie exclusivement des roues d'angles intermédiaires et non les systèmes qui viennent d'être décrits pour les cônes primitifs (fig. 218), soit son équivalent si les roues auxiliaires ne sont pas groupées, sont séparées.

Nul besoin de revenir sur cette application des systèmes précédents, au point de vue de la pratique.



Mais même au point de vue de recherches théoriques, il n'y a pas d'intérêt à envisager le problème dans toute sa complication. M. Olivier a donné la solution de la question pour un système qui jouit de propriétés particulières importantes fondées sur celles développantes. C'est le seul cas que nous examinerons et qui, du reste, nous montrera clairement comment il faudrait opérer dans le cas général.

Dans ce système, les dents de l'une des roues sont à développantes et ne diffèrent pas de celles d'un engrenage cylindrique; celles de l'autre roue sont formées d'une surface hélicoïdale développable et le contact a toujours lieu suivant une ligne droite.

285. Cherchons à donner idée du principe fondamental de la construction de ce système et à exposer les données desquelles, à l'aide des procédés de la géométrie descriptive, on peut déduire les tracés nécessaires à l'exécution.

De la propriété de l'engrenage plan à développantes que le contact a toujours lieu sur la normale commune, qui est la tangente commune aux cercles qui portent les dents il résulte que si on fait tourner une des roues autour de cette tangente les deux engrenages mus avec la vitesse voulue se toucheront toujours par un point situé sur cette tangente commune (1). La première roue restant la même, cherchons les modifications qu'il faudrait faire subir aux dents de la seconde roue, quelle surface devrait être engendrée par des génératrices passant par une section faite au milieu de l'engrenage à développantes fournissant déjà un point de contact pour que le contact eût lieu suivant une ligne droite.

(1) M. Olivier a encore fondé sur cette remarque la construction d'engrenages à développantes fort curieux. Puisque l'on peut faire tourner une des roues autour de la tangente commune, l'engrenage peut être oscillant, c'est-à-dire qu'on peut donner à une des roues deux mouvements de rotation, l'un autour de son axe, l'autre autour de la droite des contacts. Les contacts n'ayant lieu que par un point, les roues doivent se réduire à des profils sans épaisseur, ou les dents de la roue oscillante être terminées par une surface-canal.

Traçons l'engrenage plan comme à l'ordinaire, et dans un plan  $MM'$  (fig. 250) perpendiculaire au premier, traçons  $ON$ , trace du plan de la seconde roue après qu'elle a effectué une rotation autour de la tangente commune. Soient  $O, o'$ ,  $o''$ , les projections des points de contact successifs  $m, m', m''$ , ils se projèteront sur  $ON$ , en des points  $p, p', p''$ , obtenus en décrivant des arcs de cercle du point  $O$  comme centre avec les

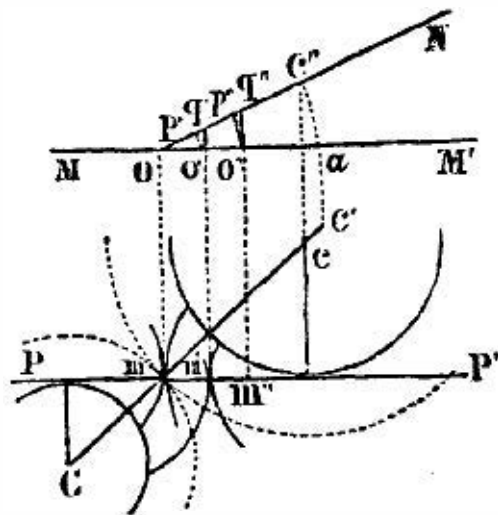


FIG. 250.

rayons  $Oo', Oo''$ . Si donc on prenait pour génératrices des surfaces des dents des deux roues les cordes  $p'o', p''o''$ , le contact aurait évidemment lieu suivant ces lignes qui passent par les points des deux roues qui viennent successivement en contact. Ces lignes formant avec le plan de chaque roue un angle égal à la moitié du supplément de l'angle des deux plans, elles engendreraient deux surfaces développables hélicoïdales, puisque l'inclinaison de ces arêtes est constante, et comme elles sont situées, lors du contact, dans le plan vertical  $PP'$ , leurs arêtes de rebroussement sont situées sur les surfaces des cylindres.

286. Insistons un instant sur cette solution, qui n'est pas aussi simple que celle que nous allons expliquer en détail, mais qui ne manque pas d'intérêt. Elle peut être facilement exécutée dans le cas où, donnant peu de largeur aux couronnes des roues, les dents restent sensiblement rectilignes dans le sens de la longueur. Elles fournissent le double mouvement de rotation et de progression qui appartient à la vis, comme nous le verrons plus loin, et qui est nécessaire d'après les positions des axes.

Soit  $P, CQ, = \delta$  l'angle des deux roues construites comme nous venons de le dire, ou des deux axes des roues; lorsque le contact a lieu et que la dent  $LM$  (cachée dans la figure) met en mouvement la roue  $BB.$ , si nous appelons  $N$  la pression au point de contact qui s'exerce suivant la normale  $CN$ ,  $P$  la puissance exercée par la roue motrice  $C$ , perpendiculairement à son axe,  $Q$  la résistance de la roue  $BB.$ , on aura, à

l'état d'équilibre, le mouvement uniforme  $P = N \cos. N C P, = N \sin. \alpha, Q = N \cos. N C Q, = N \sin. \alpha, \alpha + \alpha = \delta$ , et  $\frac{P}{Q} = \frac{\sin. \alpha}{\sin. \alpha}, \delta$

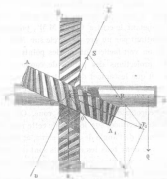


Fig. 250.

Les lignes de la figure permettent encore de déterminer les valeurs des composantes R et S qui agissent suivant les axes et causent un frottement considérable, principal inconvénient des solutions directes du problème des engrenages entre deux axes qui se rencontrent pas.

287. Revenons à la solution indiquée par M. Olivier. Ainsi que nous l'avons dit, ce ne sont pas deux surfaces hélicoïdales qu'on emploie pour former des dents, on trouve plus avantageux de conserver à la première courbe à développer une forme cylindrique et par suite d'une construction facile.

Dans ce cas, les projections des arêtes passant au point de contact deviennent les droites  $o'q', o'q$  (fig. 250). Les points  $p', p''$  appartenant à la seconde courbe, ne peuvent plus se rencontrer en contact avec les génératrices des dents cylindriques de la première. Mais si on oreule la roue C, on la pousse sur le

prolongement de son rayon en  $C'$  (déplacement qui, dans les engrenages à développantes, n'influe en rien, comme on le sait, sur la forme des dents ni sur le point de contact toujours placé sur le point de rencontre du profil de la dent de la roue qui ne change pas avec la tangente commune), et qu'on détermine ce point  $C'$  en projetant le centre  $C$  sur  $MM'$ , prolongeant jusqu'en  $C''$  et rabattant par un arc de cercle sur  $MM'$  et enfin la portant en  $C'$ ; on voit facilement que les points  $q'$ ,  $q''$  deviennent alors les projections des points de contact  $p'$ ,  $p''$  de la seconde roue, et que le contact des dents aura lieu suivant ces arêtes, qui sont des droites ayant deux points communs  $o$  et  $q$  sur les deux roues, si on les prend pour génératrices des dents de la surface hélicoïdale de la seconde roue. Ces génératrices seront des droites inclinées sur le plan de cette roue d'un angle égal au complément de l'angle des deux plans, et formeront une surface hélicoïdale dont tous les éléments sont déterminés.

288. Pour rendre ceci plus clair, proposons-nous de construire *à priori* l'engrenage dont il s'agit.

Après avoir partagé la plus courte distance des deux axes qui ne se rencontrent pas, en raison inverse des vitesses à obtenir, traçons avec ces longueurs ou des longueurs proportionnelles, comme rayons, deux cercles; la question se réduit à transmettre le mouvement du premier au second, ou mieux aux cylindres ayant ces cercles pour base et des génératrices parallèles aux axes, avec la condition que les vitesses angulaires soient dans le rapport voulu.

Nous donnons aux dents de la roue menante pour profils des développantes de cercle; les dents de la roue menée seront des portions de la surface développable formée par les tangentes à une certaine hélice tracée sur la surface cylindrique appartenant à cette deuxième roue.

Soient les deux cylindres construits comme nous venons de le dire, c'est-à-dire ainsi (fig. 252) : la plus courte distance entre les deux axes ayant été divisée en deux parties  $OK$ ,  $O'K$  inversement proportionnelles aux vitesses des axes; prenons

ces parties  $OK$ ,  $O'K$  pour rayons des deux cylindres primitifs. Les deux génératrices des deux cylindres parallèles aux deux axes passant au point  $K$ , détermineront un plan  $P$ , tangent aux deux

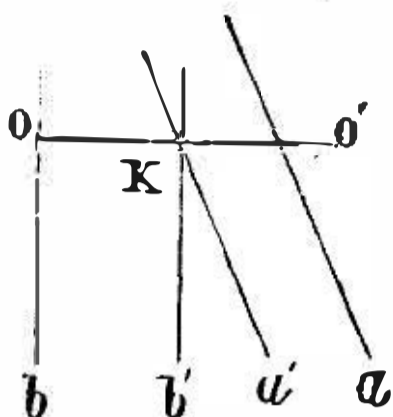


Fig. 252.

cylindres. En effet, ce plan comprendra une génératrice de chacun des cylindres, c'est-à-dire deux perpendiculaires aux parties de la plus courte distance, qui sont les rayons des cercles de base des cylindres, et qui seront par suite perpendiculaires à ce plan. Plaçons, pour simplifier, l'axe du premier cylindre vertical, et l'axe du deuxième incliné à l'horizon.

Dans le plan  $P$  menons une droite verticale, enroulons-la sur le deuxième cylindre, de manière à former une hélice. Si l'on fait tourner ce cylindre autour de son axe, les différents points de l'hélice viendront se placer dans le plan vertical  $P$ , et les tangentes à l'hélice viendront aussi successivement se placer dans ce plan; elles auront alors une direction verticale, car elles feront toutes le même angle avec les génératrices du cylindre, et cet angle est précisément égal à celui que la verticale que nous avons enroulée sur le cylindre fait avec son axe.

Toutes ces tangentes forment une surface développable, qui a pour arête de rebroussement, l'hélice.

Tout plan tangent à cette surface développable passe, comme on sait, par deux arêtes consécutives, c'est-à-dire par deux tangentes à l'hélice infiniment voisines; c'est donc le plan osculateur de l'hélice au point commun aux deux tangentes (renfermant deux éléments de la courbe). Ce plan passe par la normale abaissée de ce point de l'hélice sur l'axe du cylindre, ce que nous démontrerons plus loin. Il s'ensuit que ce plan est perpendiculaire au plan tangent au cylindre mené par ce point de l'hélice (1).

(1) Cette démonstration est empruntée aux cours de machines de l'École Polytechnique, lorsqu'il était professé par M. Chasles (feuilles lithographiées).

D'après cela, le plan osculateur à l'hélice en un point  $m$ , situé dans le plan vertical  $P$ , est normal à ce plan, puisqu'il passe par la perpendiculaire abaissée du point  $m$  sur l'axe du cylindre, laquelle est perpendiculaire au plan  $P$  tangent au cylindre. D'une autre part, ce plan osculateur passe par la tangente à l'hélice au point  $m$ , laquelle est verticale; ce plan est donc le plan vertical normal au plan  $P$ . Or, ce plan osculateur est le plan tangent à la surface hélicoïdale. Donc, dans le mouvement du cylindre autour de son axe, tous les plans tangents à la surface développable hélicoïdale viennent se placer perpendiculairement au plan vertical  $P$ , qu'ils coupent suivant les droites verticales.

Maintenant, supposons que le premier cylindre soit armé d'une dent dont le profil soit une développante de cercle qui lui sert de base, cette dent sera elle-même un cylindre vertical; ce cylindre sera toujours normal au plan vertical  $P$ , parce qu'une développante de cercle est toujours normale à toute tangente au cercle. Donc, ce cylindre en tournant sera toujours tangent à la surface développable hélicoïdale, qu'il touchera suivant une de ses génératrices.

Ce cylindre poussera donc la surface hélicoïdale en s'appuyant sur elle dans toute l'étendue de sa génératrice, qui, au moment du contact, est dans une position verticale. Cette pression fera tourner le cylindre autour de son axe.

Après un mouvement infiniment petit, ce sera une autre arête de la surface hélicoïdale qui sera dans une position verticale et que le cylindre à base de développantes poussera.

Quand ce cylindre, qui forme une dent du premier cylindre, aura cessé de pousser la surface hélicoïdale qui forme une dent du deuxième cylindre, deux autres dents semblables commenceront à être en prise. De la sorte, la transmission du mouvement se fera d'une manière continue, comme dans les engrenages coniques.

289. Nous avons dit que le plan osculateur en un point d'une hélice tracée sur un cylindre circulaire passe par la perpendicu-

laire abaissée de ce point sur l'axe du cylindre. Voici la démonstration de cette proposition.

Le plan osculateur passe par deux tangentes infiniment voisines  $mt, mt'$  (fig. 253). Que l'on suppose que par le point  $m$  on

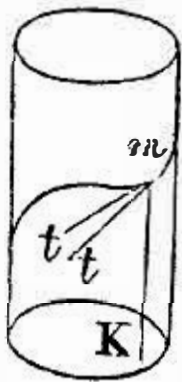


Fig. 253.

on ait mené des droites parallèles à toutes les tangentes à l'hélice, ces droites formeront un cône de révolution autour de l'arête  $mk$  du cylindre. Le plan des deux tangentes  $mt, mt'$  sera tangent à ce cône. Conséquemment il sera perpendiculaire au plan qui contient la tangente  $mt$  et l'arête  $mk$ ,

car celui-ci sera le plan diamétral du cône; or ce plan est tangent au cylindre. Donc le plan des deux tangentes  $mt, mt'$ , c'est-à-dire le plan osculateur de l'hélice, est normal au plan tangent au cylindre. Donc il passe par la normale à ce plan tangent, c'est-à-dire par la perpendiculaire abaissée du point  $m$  sur l'axe du cylindre.

290. La rotation du deuxième cylindre autour de son axe sera toujours dans un rapport constant avec la rotation du premier cylindre.

En effet (fig. 254), soit  $LL$  la tangente commune aux bases des deux cylindres. Soient  $n, n'$  les points où la développante du cercle qui forme la dent du premier cylindre rencontre cette

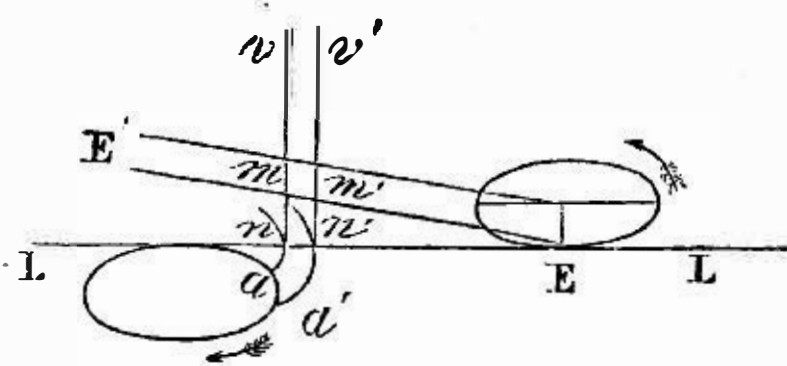


Fig. 254.

droite  $LL$ , dans deux positions successives;  $nn'$  égal à l'arc  $aa'$ , est proportionnel à la rotation du premier cylindre.  $EE'$  étant l'arête de contact du deuxième cylindre et du plan  $P$ , est rencontrée en  $m$  et  $m'$  par les perpendiculaires élevées en  $n$  et  $n'$ , et  $Em$

$Em'$ , mesurent les distances de deux points de l'hélice, qui dans la rotation viennent se placer sur la droite  $EE'$ , à la base circulaire du cylindre. Le segment  $mm'$ , différence de ces distances, est proportionnel à la rotation du second cylindre; mais le segment  $nn'$  est proportionnel à  $mm'$ . Nous avons dit que ce dernier était proportionnel à la rotation du premier cylindre. Donc les rotations des deux cylindres sont entre elles dans un rapport constant.

291. On peut, dans ce système d'engrenages, construire des engrenages intérieurs et extérieurs. Ni les uns ni les autres ne sont évidemment à retour; cela résulte clairement de la forme des dents hélicoïdales. Au reste, cette surface hélicoïdale ayant deux nappes formées par l'enroulement d'une droite autour d'un cylindre sous un angle constant (à droite et à gauche), il sera facile de construire un engrenage agissant dans un sens, celui agissant en sens inverse étant déterminé, et de les assembler avec un même axe pour en obtenir le mouvement dans les deux sens.

La savante solution du problème des engrenages entre deux axes qui ne sont pas dans un même plan que nous venons d'expliquer, est due à M. Olivier. Elle n'a pas encore reçu d'applications pratiques importantes; on doit l'attribuer surtout à la difficulté de tracé, et aussi au frottement considérable qu'engendrerait, sur les collets des tourillons et sur les dents, l'inclinaison de la dent hélicoïdale. Aussi dans la pratique préfère-t-on employer deux engrenages coniques.

292. *Frottement.* — On voit facilement que le travail du frottement ne sera plus calculable ici, de la même manière que pour les engrenages coniques; le chemin parcouru par le frottement sera différent. En effet, le point de contact se meut sur une surface hélicoïdale dont les génératrices font un angle  $90^\circ - \delta$  ( $\delta$  étant l'angle des plans des deux roues) avec le plan perpendiculaire au second axe. Le contact ne demeure plus sur une même tangente commune comme dans les engrenages coniques, il se déplace en outre sur un plan incliné représenté par  $mm'$ ,



fig. 254. Si l'on compare ce qui se passe dans cet engrenage à ce qui a lieu dans un engrenage conique, où le contact parcourrait la ligne  $nn'$ , il existe donc la relation entre la valeur du chemin parcouru  $l$  par le contact et la rotation  $a$ ,  $l \sin. \delta = a$ , cette longueur pour un tour devient  $\frac{2 \pi R}{\sin. \delta}$  au lieu de  $2 \pi R$ . Le

travail du frottement sera sensiblement celui des engrenages coniques multiplié par  $\frac{1}{\sin. \delta}$ , ou :

$$T_f = \left( \pi f T_r \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2} - \frac{2 \cos. \delta}{n n'}} \right) \frac{1}{\sin. \delta},$$

$\sin. \delta$  étant toujours plus petit que 1, cette valeur du frottement est toujours plus grande que pour les engrenages coniques (indépendamment de celui considérable qui se produit sur les collets des tourillons); pour  $\delta = 30^\circ$   $\sin. \delta = \frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{\sin. \delta} = 2$ .

#### AXES A ANGLE DROIT.

293. *Vis sans fin.* — Dans le cas particulier où les deux axes qui ne se rencontrent pas forment un angle droit ou peu différent d'un droit, la solution précédente ramène à un organe fréquemment employé, représenté (fig. 255), composé d'une roue dentée dont les dents sont des développantes de cercle engrenant avec une vis à filets rectangulaires dite *vis sans fin*. Les dents de la roue et les plans inclinés de la surface hélicoïdale servent à transmettre le mouvement d'un axe à l'autre; en général c'est la vis qui conduit.

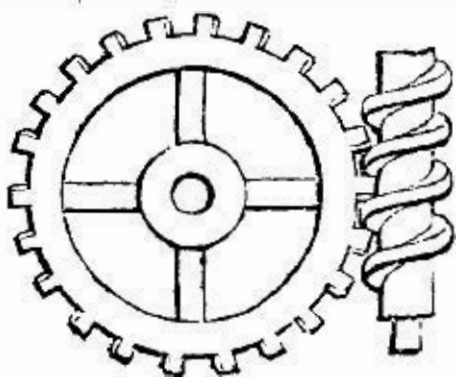


Fig. 255.

Je suppose que l'axe de la vis soit vertical, l'axe de la roue sera horizontal, et la roue, que nous supposons un instant être un cercle ou disque sans épaisseur, sera dans un plan vertical passant par l'axe de la vis.

Ce plan coupe la surface inférieure de la vis (fig. 256) suivant plusieurs de ses génératrices, c'est-à-dire suivant des droites  $\mu m$ ,  $\mu' m'$ ..... et le cylindre sur lequel sont les hélices extrêmes de la vis suivant une génératrice  $m m'$ .

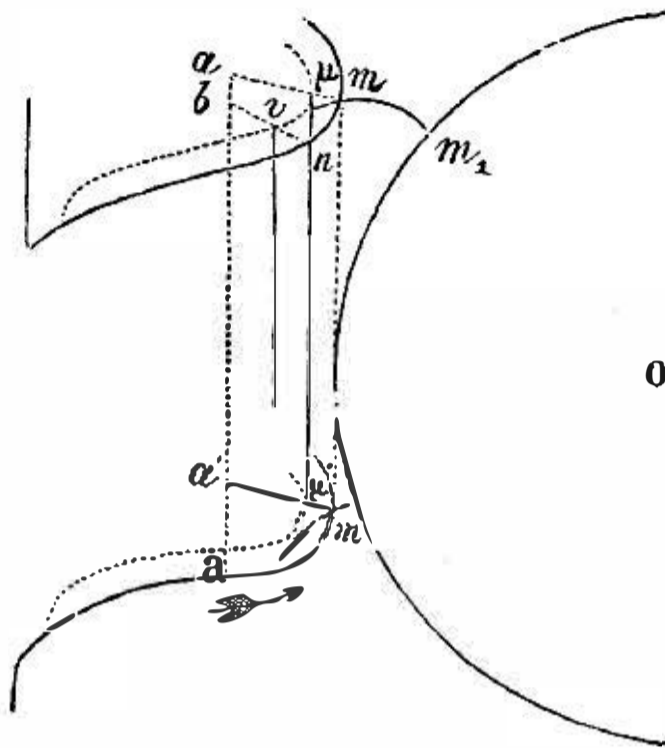


Fig. 256.

Regardons cette droite  $m m'$  comme la directrice d'une crémaillère (système dont nous parlons plus loin), c'est-à-dire comme portant des flancs  $m \mu$ ,  $m' \mu'$ ... perpendiculaires à sa direction, et donnons à la roue des dents ayant pour profils des développantes de cercle.

Si l'on fait tourner la vis dans le sens indiqué par la flèche, ses génératrices telles que  $b n$ , inférieures à  $a m$ , viendront successivement se placer dans le plan de la roue, et se trouveront en contact avec sa dent  $m m_1$ ; elles exerceront donc sur cette dent une pression de haut en bas, qui fera tourner la roue.

Quand la dent  $m m_1$  cessera d'être en prise, d'autres dents fonctionneront; de sorte que le mouvement continu de la vis produira un mouvement continu de la roue.

Si le premier est régulier, le deuxième le sera aussi, car l'arc parcouru par un point  $m_1$  de la roue sera égal au segment intercepté sur la verticale  $m m'$  par deux positions de la roue  $m m_1$ . Ce segment sera la distance, estimée verticalement, entre deux génératrices  $a m$ ,  $b n$  de la vis; or cette distance est proportion-

nelle à la rotation de la vis; donc la rotation de la roue sera elle-même proportionnelle à la rotation de la vis, ou

$$\omega' : \omega = h : 2 \pi R,$$

$h$  hauteur du pas de la vis,  $R$  rayon de la roue; pour un tour de la vis ou  $\omega' = 1$ , la roue aura tourné de  $\frac{2 \pi R}{h}$  ou d'une division, celle-ci sera de longueur égale au pas de la vis.

294. Nous avons supposé que la roue se réduisait à un simple cercle sans épaisseur; mais, dans la pratique, les dents devront avoir une certaine épaisseur, et leur face latérale, qui a pour base la développante du cercle de la roue, ne peut pas être perpendiculaire au plan de la roue, à cause de l'inclinaison de la surface de la vis sous laquelle doit se loger la dent. Il faudra donner à cette face latérale une inclinaison semblable à celle de la surface de vis lors du contact, d'où résultera un contact suivant une ligne. De cette condition résulte, comme nous allons le voir, l'impossibilité de la réciprocité du système dans tous les cas de la pratique.

Supposons que la puissance soit une force  $P$  tangente à la circonférence du cylindre sur lequel est tracée l'hélice extrême, c'est-à-dire à la circonférence qui a  $am$  pour rayon; et la résistance une force  $Q$  qui s'exerce, suivant la génératrice du contact, en  $m$ , de bas en haut. Si l'on fait abstraction du frottement, la relation entre la puissance et la résistance sera, pour l'équilibre, comme sur le plan incliné, savoir  $P \operatorname{tang.} \alpha = Q$ ,  $\alpha$  étant l'angle que la tangente à l'hélice fait avec la direction de la force  $P$ .

295. Quel que soit l'angle  $\alpha$ , on pourra toujours, en augmentant la force  $P$ , faire fonctionner le système. On peut considérer la dent de la roue comme une petite surface  $K$  (fig. 257) appliquée sur la surface de la vis et poussée verticalement de bas en haut, et la vis comme un plan peu incliné qui ne peut avancer qu'en faisant descendre cette pièce  $K$  qui la presse, et qu'avec une force suffisante on fera toujours descendre.

Mais si l'on veut conduire la vis par la roue, il faudra que la

force verticale  $Q$  qui presse la petite surface  $K$  sur la surface  $DE$  de la vis comme sur un plan incliné, soit capable de produire le glissement de cette surface sur le plan malgré le frottement.

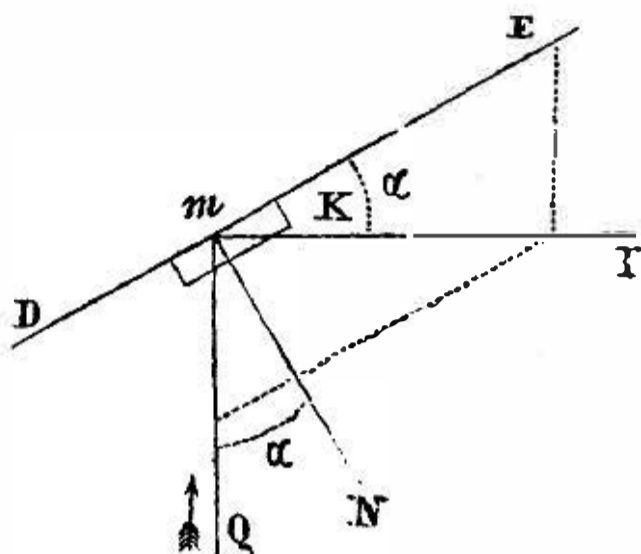


Fig. 257.

Or nous savons que la condition du glissement d'un corps sur un plan, c'est que la direction de la force qui doit le produire fasse avec la normale au plan un angle plus grand que celui du frottement. Sur la figure, l'angle que la verticale  $mQ$  fait avec la normale  $mN$  est égal à l'angle que la tangente à l'hélice, représentée par  $DE$ , fait avec l'horizontale  $mI$ .

Il faut donc, pour que l'engrenage soit réciproque, c'est-à-dire pour que la roue puisse conduire la vis, que l'inclinaison de l'hélice sur le plan horizontal soit plus grande que l'angle de frottement; ou en appelant  $f$  le coefficient de frottement, que l'on ait

$$\text{tang. } \alpha > f, \text{ ou } \frac{Q}{f} > \frac{Q}{\text{tang. } \alpha};$$

et comme  $Pf$  est la résistance due au frottement, croissante avec  $Q$ , on aura toujours, si cette condition n'est pas remplie,  $Pf + P \text{ tang. } \alpha > Q$ , quelle que soit la valeur que l'on donne à  $Q$ .

Cette propriété est fréquemment utilisée dans la pratique; presque toujours la vis conduit le pignon, tandis que celui-ci ne peut conduire la vis à cause de la faible inclinaison des filets. Elle permet d'employer avec sécurité cette transmission de mouvement dans les machines à élever les fardeaux, par exemple, parce qu'on est sûr que les poids soulevés ne pourront re-

descendre d'eux-mêmes, et en général pour éviter les réactions d'une résistance considérable sur une puissance bien moindre qui détermine un petit mouvement.

Lorsqu'au contraire on veut que la roue puisse mener la vis, il faut donner au filet une grande inclinaison qui ne peut être moindre de  $45^\circ$ , et qu'on fait souvent plus grande. La vis a alors plusieurs filets et chaque tour de la vis fait tourner la roue d'un nombre de dents égal à celui des filets. Ce dispositif est quelquefois employé pour les régulateurs à ailettes des grosses horloges.

296. *Frottement.* — La vis et la roue dentée donnant exactement en coupe le système dit *crémaillère*, que nous allons bientôt étudier, on peut prendre comme dans ce cas pour effort moyen du frottement  $fQ \frac{a}{2R} = \frac{f\pi Q}{n}$ , puisque  $a = \frac{2\pi R}{n} = h$  pas de la vis. Le chemin parcouru par ce frottement pour une division n'est plus  $a$  mais  $l = \frac{a}{\sin. \alpha}$ ,  $\alpha$  étant l'angle de l'hélice avec l'axe. Le travail pour une division devient  $fQ \frac{a}{n \sin. \alpha}$ , et pour un tour (en remplaçant  $a$  par  $2\pi R$ , et comme  $Q \times 2\pi R = T_r$ ), égal à  $f\pi T_r \frac{1}{\sin. \alpha}$ , quantité dont la valeur est d'autant plus grande que  $\alpha$  est moindre,  $\frac{1}{\sin. \alpha}$  étant une quantité plus grande que 1, puisque  $\sin. \alpha$  est toujours plus petit que 1.

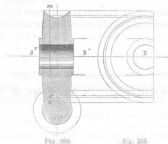
On voit que ce système est peu propre à transmettre de grandes forces, et qu'il s'y produit un frottement qui occasionne une perte de travail considérable.

297. *Vis tangente.* — On emploie assez fréquemment une disposition désignée sous le nom de *vis tangente*, qui diffère de la vis sans fin en ce que les dents de la roue sont remplacées par des surfaces enveloppes, en contact avec le filet de la vis suivant une ligne continue, sur toute la largeur de la couronne cylindrique.

Dans cette disposition la denture du pignon, au lieu d'être

limitée extérieurement par une surface cylindrique droite, se termine par une gorge cylindrique qui épouse la forme de la vis sans fin.

Si l'on considère un plan  $mn$  perpendiculaire à l'axe du pignon, il coupera le filet hélicoïdal, dont la génération n'est d'ailleurs nullement modifiée, suivant une courbe que l'on pourrait toujours déterminer par points successifs au moyen des méthodes de la géométrie descriptive.



Relativement à ce plan  $mn$ , situé d'ailleurs d'une manière quelconque sur la largeur totale du pignon, cette courbe serait la denture d'une crémaillère destinée à agir contre la courbe déviée à l'axe du pignon et dans le plan  $mn$ . Cette courbe devrait être l'enveloppe de la première, et la série de courbes semblables déterminerait la surface gauche des dents du pignon.

Sans qu'il soit besoin de recourir à de longues tracés aléatoires, il est un moyen d'exécution qui permet d'obtenir facilement la denture du pignon. Nous verrons plus loin comment M. Olivier a généralisé et étendu cette méthode, et montré comment il en résultait des formes susceptibles de satisfaire à toutes les conditions des engrenages.

Après avoir exécuté sur le tour le *litige à gorge* dans lequel doivent être découpées les surfaces gauches qu'il s'agit d'obtenir,

on installe ce disque sur un axe pouvant tourner librement et perpendiculaire à l'axe de la vis sans fin.

Une vis sans fin, en acier trempé, pareille à celle qui doit mener le pignon que l'on veut produire et montée sur un axe, invariablement maintenue dans le plan qui divise en deux parties égales la denture gauche, est placée de telle façon que le filet saillant de la vis, entaillée parallèlement à l'axe pour pouvoir couper, presse fortement contre la gorge du disque. On fait alors tourner la vis d'une manière continue, et son filet se fraye un passage dans cette gorge. On continue la rotation de la vis en rapprochant successivement l'axe du pignon, au fur et à mesure de l'approfondissement graduel de l'entaille découpée par le filet de la vis.

Si l'on réfléchit que la vis en travail imprime nécessairement au pignon qu'elle découpe un mouvement de rotation, en même temps qu'elle fait son passage propre dans l'épaisseur de ce disque, on comprendra qu'après avoir prolongé suffisamment le travail dans les conditions expliquées, le filet de vis doit arriver à se loger dans l'entaille qu'il pratique jusqu'à ce que son noyau vienne s'appliquer contre la gorge du disque, les parois de l'entaille ayant pris successivement la forme exacte des surfaces gauches voulues.

Quand le pignon est achevé, la vis tailleuse est remplacée par la vis semblable destinée à conduire le pignon obtenu.

Il est bon de remarquer que la première impression de la vis tailleuse sur le contour du pignon marque des divisions plus nombreuses que ne seront les divisions définitives, lorsqu'elle travaillera sur une partie du pignon moins éloignée du centre, lorsqu'elle aura pénétré dans celui-ci. Il faudrait commencer le travail avec une vis semblable à celle qui doit le terminer, sauf que le pas serait plus grand de la quantité dont nous venons de parler.

C'est surtout dans les machines à diviser qu'on emploie les vis tangentés. Comme il importe alors d'avoir beaucoup de dents en prise avec la vis, à filet triangulaire ou filet carré

(les deux peuvent s'employer), pour pouvoir les faire très-fines, on emploie en général des vis à plusieurs filets, deux ou trois spires étant également espacées entre les spires de la première hélice.

298. *Spirale*. — Au lieu d'employer le filet d'une vis, on peut, pour transmettre le mouvement entre deux axes faisant un angle droit, engager les dents d'une couronne dans une rainure tracée sur un plateau ou une spirale saillante (fig. 260), et telle que  $\rho = r \omega$  ( $\rho$  longueur du rayon vecteur,  $\omega$  angle décrit); c'est la spirale d'Archimède qui s'obtient facilement dans les arts, comme nous le verrons. Les dents de la roue seront entraînées par les rainures dans le mouvement de rotation du plateau, et leur écartement sera déterminé par la condition que deux dents soient engagées en même temps. Le mouvement inverse n'aurait lieu, car il ne se produirait qu'une pression sur l'axe de la spirale qui est situé dans le plan moyen de la roue.

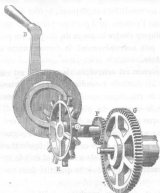


Fig. 260.

La largeur de la rainure doit être assez grande pour donner



passage aux dents de la roue sous leurs diverses inclinaisons, en remarquant qu'il doit y avoir au moins deux dents en prise. En prenant cette précaution, le mouvement peut conserver une régularité suffisante mais non absolue, car pour un même mouvement angulaire de la spirale le mouvement de la roue dentée varie suivant la partie de la spirale où la dent de la roue est engagée; mais la vitesse moyenne peut être suffisamment régulière pour la pratique. En un tour du plateau une dent aura avancé de l'intervalle qui sépare deux rainures ou d'une division de la roue.

Les dents de la roue étant des fuseaux cylindriques, les côtés de la saillie sur lesquels agissent les dents doivent appartenir à une surface engendrée par une droite reposant sur un point de la spirale, et passant par le centre de la roue à fuseau quand ce point de la spirale passe dans le plan moyen de celle-ci. Elles appartiendront donc à une surface réglée dont la spirale sera la directrice et dont les génératrices seront inclinées en raison de la grandeur de la spirale et du diamètre de la roue à fuseaux. En construisant ainsi, le contact des dents et des rainures pourra avoir lieu suivant une ligne.

Ce système bien que d'une autre nature que la vis sans fin, en provient en ce que la spirale d'Archimède a quelque analogie avec l'hélice; elle est engendrée dans un plan comme celle-ci relativement aux génératrices d'un cylindre, car l'outil qui la trace doit progresser d'une quantité constante pour une même rotation.

Le frottement sera considérable dans un semblable système, parce que pour chaque tour de la spirale faisant tourner la roue dentée d'une division, le chemin parcouru par le frottement sera égal au développement de toute la spirale. Cet appareil ne saurait donc servir pour transmettre des efforts considérables.

299. *Emploi de la vis sans fin et de la spirale.* — La vis sans fin et la spirale jouissent toutes deux de la propriété de faire avancer d'une division seulement les dents de la roue pour un

tour entier de la vis ou du plateau. Cette propriété les rend très-propres à être utilisées simultanément dans les compteurs dont la construction repose sur l'emploi de systèmes qui permettent d'obtenir un très-petit nombre de tours d'un axe pour un nombre très-grand de tours d'un autre axe.

M. Saládin de Mulhouse a combiné le double emploi de ces systèmes pour simplifier la construction de ces compteurs. A cet effet, il emploie une roue servant à la fois comme roue dentée d'un système et comme vis sans fin, ou comme plateau portant une spirale d'un autre système.

En principe, une roue de 50 dents, par exemple, avançant d'une division pour un tour d'un arbre portant une vis sans fin, ou faisant un tour pour 50 du premier, agira de même si sa face est entaillée en spirale sur la roue dentée d'un troisième axe. Si cette roue porte encore 50 dents, son axe ne tournera que d'un tour pour 50 tours de la première roue dentée ou de  $50 \times 50 = 2500$  tours du premier axe dont il s'agit d'enregistrer les révolutions.

300. *Autres compteurs.* — La vis sans fin exige, comme les engrenages, qu'on laisse un jeu variable à la roue qui engrène avec la vis, mais il est à remarquer qu'on a fait de ce jeu un moyen curieux de construction de compteurs, au moyen de roues dentées et de vis sans fin, que nous devons signaler ici. Cette construction repose sur l'emploi de deux roues qui diffèrent non en diamètre, mais par leur nombre de dents.

$Dd$  est un axe fixe (fig. 261), B une roue tournant autour de cet axe, C une seconde roue de même diamètre tournant librement sur l'axe  $Dd$ . A est une vis sans fin qui engrène avec les deux roues.

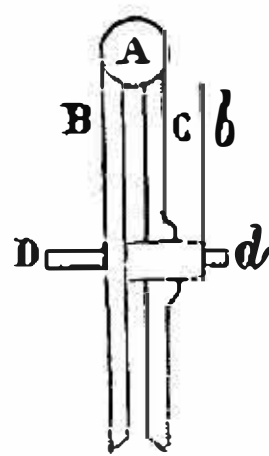


Fig. 261.

Si celles-ci ont le même nombre de dents, elles se meuvent comme une seule pièce; mais si l'une a une ou deux dents de plus ou de moins que l'autre (différence qui répartie également change seulement le jeu, et n'empêche pas l'action de la vis), les

rotations des deux roues seront différentes, car, comme les révolutions de la vis font traverser au plan des centres le même nombre de dents de chaque roue dans le même temps, il faut que, quand l'une d'elles a fait une révolution complète, l'autre ait fait plus ou moins d'une révolution, en raison du nombre des dents manquantes ou excédantes.

B a  $N$  dents, C en a  $N + m$ ; pour un tour de la première il passera  $N$  dents de chacune ces roues à travers le plan des centres, et la différence des deux rotations, la rotation relative de la roue C sera  $N + m - N = m$ .

Cette disposition est employée pour compter les révolutions d'un axe, en attachant une aiguille  $b$  à l'axe de B, et en traçant un cadran sur la face de C. Cette aiguille B marche très-lentement par rapport à C, et peut par suite enregistrer un grand nombre de tours de A. Si, par exemple, B a 100 dents et C 101, l'aiguille fait le tour du cadran pour le passage de  $100 \times 101$  dents des deux roues à travers le plan des centres, ou pour 10,100 tours de la vis.

#### ENGRENAGES TAILLÉS PAR UNE VIS ET SON ÉCROU.

Nous terminerons la théorie des engrenages par l'indication d'un curieux système auquel l'étude de leur théorie générale a conduit M. Olivier, et qui est une généralisation du système de la vis tangente (art. 296).

Nous allons d'abord résumer, d'après lui, à un point de vue très-général, la théorie des engrenages.

301. Concevons deux axes A et A<sub>1</sub> placés arbitrairement dans l'espace l'un par rapport à l'autre (fig. 262) (1). Ayant construit les cercles primitifs C et C<sub>1</sub>, imaginons un plan Q de position arbitraire dans l'espace, mais passant par le point  $x$  commun aux deux cercles, et traçons dans ce plan Q un cercle D, passant par ce même point  $x$ , mais ayant pour centre un point quel-

(1) Cette théorie est extraite de l'ouvrage de M. Olivier, *Théorie géométrique des engrenages*.

conque  $b$  du plan  $Q$ ; imaginons enfin un axe  $B$  passant par le centre  $b$  du cercle  $D$ , et perpendiculaire au plan  $Q$  de ce cercle.

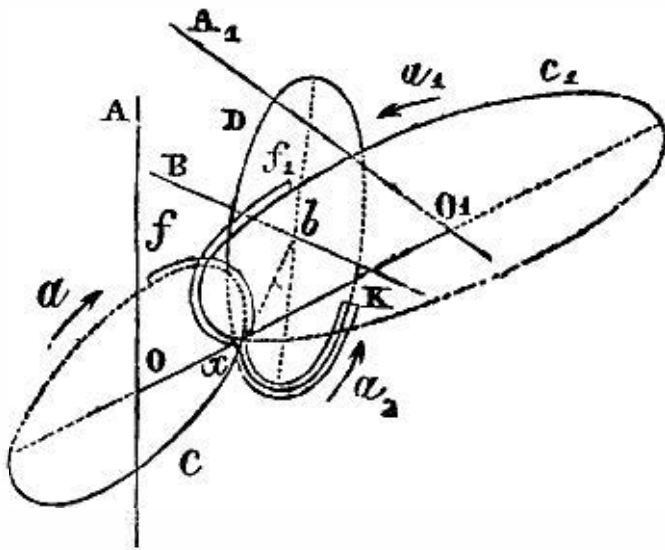


Fig. 262.

Cela fait, enroulons un fil sur le cercle du point  $f$  jusqu'au point  $x$ , puis sur le cercle  $D$  du point  $x$  au point  $K$ .

Enroulons un second fil sur le cercle  $C$ , du point  $f$ , jusqu'au point  $x$ , puis sur le cercle  $D$  du point  $x$  au point  $K$ .

Il est évident que si je fais tourner le cercle  $D$  autour de son axe  $B$  dans le sens indiqué par la flèche  $a_2$ , les axes  $A$  et  $A_1$  tourneront sur eux-mêmes avec les vitesses convenables  $v$  et  $v_1$ ; rouleront l'un sur l'autre en tournant, le premier dans le sens indiqué par la flèche  $a$ , et le second dans le sens indiqué par la flèche  $a_1$ . Et ces cercles rouleront *directement* l'un sur l'autre, s'ils ont même tangente au point  $x$ , et rouleront *angulairement* l'un sur l'autre, s'ils ont en ce point  $x$  des tangentes différentes.

Cela posé, concevons une surface  $\Sigma$  fixée d'une manière invariable au cercle  $D$ , et concevons qu'à l'axe  $A$  soit fixée une masse de matière  $M$ , et qu'aussi se trouve fixée à l'axe  $A_1$  une matière  $M_1$ . Pendant que le cercle  $D$  tournera autour de son axe  $B$ , les masses  $M$  et  $M_1$  tourneront autour des axes  $A$  et  $A_1$ , le rapport de leurs vitesses angulaires étant constant et égal à  $\frac{v}{v_1}$ ; en même temps que la surface  $\Sigma$  se mouvra dans l'espace, entraînée qu'elle est par le cercle  $D$ .

Et si l'on considère la surface  $\Sigma$  comme *outil*, cet outil  $\Sigma$  fera

successivement son logement, soit dans la masse  $M$ , soit dans la masse  $M_1$ , ces logements successifs que l'on obtiendra en faisant mouvoir le cercle  $D$  formeront une surface  $\Phi$  fixée à l'axe  $A$ , et une surface  $\Phi_1$  fixée à l'axe  $A_1$ , et ces deux surfaces *enveloppes*, qui évidemment auront l'une et l'autre la surface  $\Sigma$  pour *enveloppée* commune, seront telles, que supprimant le cercle  $D$  et la surface  $\Sigma$ , elles se conduiront uniformément.

La surface  $\Sigma$  se met à chaque instant du mouvement en contact avec la surface  $\Phi$ , par une caractéristique  $\xi$ , et cette surface  $\Sigma$  se met aussi à chaque instant du mouvement en contact avec la surface  $\Phi_1$ , par une caractéristique  $\xi_1$ ; en général les courbes  $\xi$  et  $\xi_1$  seront des lignes différentes et distinctes, et comme elles sont toutes deux tracées sur la surface  $\Sigma$ , en général, elles se couperont en un point; par conséquent, d'après ce mode de construction, on peut dire que les dents de l'engrenage ne se toucheront que par un point.

Ces engrenages sont dits de *précision*, et l'on voit qu'ils deviennent de *force*, dans le cas particulier qui n'est autre que le mode de solution employé jusqu'ici, lorsque l'on suppose que le cercle  $D$  se confond avec l'un des cercles  $C$  ou  $C_1$ .

De cette théorie tout à fait générale, nous pouvons descendre aux cas particuliers, car la surface  $\Sigma$  pouvant être une surface quelconque, on peut prendre pour surface  $\Sigma$  un plan  $\chi$ , et dès lors comme l'enveloppe de l'espace parcouru par un plan est toujours une surface développable, les deux surfaces  $\Phi$  et  $\Phi_1$  seront développables, et dès lors d'une construction plus facile dans la pratique.

Le plan  $Q$ , sur lequel est tracé le cercle  $D$ , peut faire avec le plan du cercle  $C$  un angle arbitraire  $\alpha'$ , et en même temps la trace de ce plan  $Q$  sur le plan du cercle  $C$  peut faire avec le rayon  $ox$  de ce cercle  $C$  un angle arbitraire  $\beta$ ; on peut donner à chacun des angles  $\alpha$  et  $\beta$ , suivant que l'on considère l'un des trois cas *axes parallèles, axes qui se coupent, axes non situés dans un même plan*, une valeur particulière et telle qu'elle amène des simplifications dans la construction *pratique* de l'engrenage.

On peut en dire autant du cercle  $D$ , car on peut prendre son centre  $b$  partout où l'on veut sur le plan  $Q$ , on pourra donc lui donner une position particulière et telle qu'elle permette avec plus de simplicité l'épure qui doit servir à construire le *relief*.

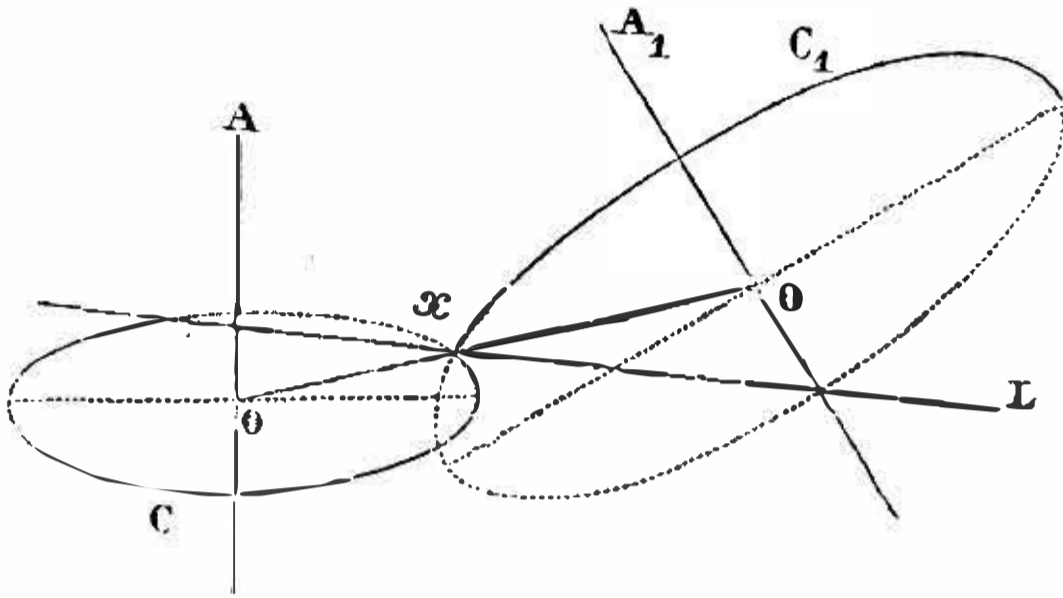


Fig. 263.

On peut aussi tracer le cercle  $D$  avec un rayon plus ou moins grand, le rayon du cercle  $D$  peut même être infini, et dès lors ce cercle devient une ligne droite  $L$  (fig. 263) passant par le point  $x$ , et pouvant avoir dans l'espace une position arbitraire par rapport aux axes  $A$  et  $A_1$ . C'est ce que nous supposerons dans ce qui va suivre.

302. *De l'exécution mécanique d'un nouveau genre d'engrenage.* — Nous allons voir comment la considération d'une surface, qui par ses deux enveloppées détermine les formes des dents, va nous permettre de construire un genre tout nouveau d'engrenage auquel il eût été bien difficile d'arriver par toute autre considération. Étant donnés l'axe  $A$  et l'axe  $A_1$ , leur plus courte distance  $l$ , et la droite  $L$  faisant un angle  $\alpha$  avec l'axe  $A$ , concevons qu'une surface  $\Sigma$ , s'étant mue parallèlement à elle-même le long de la droite  $L$ , ait pris les positions  $\Sigma \Sigma' \Sigma'' \Sigma'''$  équidistantes entre elles; la distance entre deux positions étant mesurée parallèlement à la droite et égale à une quantité  $h$ .

Le cercle  $C$  de rayon  $\rho$  aura sa circonférence  $2\pi\rho$  égale à  $m h$ , et nous supposerons que  $h$  soit tel que  $m$  se trouve un nombre entier.

Cela posé, chaque surface  $\Sigma \Sigma' \Sigma'' \Sigma'''$  engendrera une surface

enveloppe  $\Phi \Phi' \Phi'' \Phi'''$  dans le mouvement déjà décrit, et l'on aura ainsi  $n$  surfaces enveloppes placées sur le contour du cercle  $C$  et angulairement équidistantes.

Le cercle  $C_1$ , du rayon  $\rho_1$ , aura sa circonférence  $2\pi\rho_1$  égale à  $nh$ , et  $n$  sera un nombre entier, en admettant que  $\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{V_1}{V}$  soit un nombre commensurable.

Cela posé, chaque surface  $\Sigma \Sigma' \Sigma'' \Sigma'''$ , engendrera de même une surface enveloppe  $\Phi_1 \Phi_1' \Phi_1''$ , et l'on aura ainsi  $n$  surfaces enveloppes placées sur le pourtour du cercle  $C_1$ , et angulairement équidistantes.

Et si nous admettons que le système étant en repos, les couples de surfaces  $\Phi$  et  $\Phi_1$ ,  $\Phi'$  et  $\Phi_1'$ ,  $\Phi''$  et  $\Phi_1''$ , se trouvent en contact, il s'ensuivra qu'en faisant mouvoir les axes  $A$  et  $A_1$  avec les vitesses respectives  $V$  et  $V_1$ , les surfaces  $\Phi$  et  $\Phi_1$ ,  $\Phi'$  et  $\Phi_1'$ ,  $\Phi''$  et  $\Phi_1''$ , se conduiront uniformément en restant en contact pendant un *trajet* plus ou moins long, et que lorsque  $\Phi$  et  $\Phi_1$  se quitteront (immédiatement après, ou un peu après, ou un peu avant, suivant la longueur du trajet pendant lequel  $\Phi$  et  $\Phi_1$  peuvent être en contact), les surfaces  $\Phi'$  et  $\Phi_1'$  se mettront en contact et ainsi de suite.

On voit évidemment que nous obtenons ainsi un véritable engrenage composé de deux roues dentées et dans lequel les deux axes ne sont pas situés dans le même plan.

Il s'agit de réaliser ces conceptions théoriques.

Pour cela il faut remarquer que si nous engendrons la surface  $\Phi$  au moyen d'un outil  $V$  terminé par la face convexe de la surface  $\Sigma$  (supposée jusqu'ici sans épaisseur), nous devons engendrer la surface  $\Phi_1$  au moyen d'un outil  $V_1$ , terminé par la face concave de  $\Sigma$ ; en d'autres termes, l'outil  $V$  sera l'épreuve dont l'outil  $V_1$  sera la *contre-épreuve*, ou l'outil  $V$  sera le *relief* dont l'outil  $V_1$  sera le *creux*.

La vis et l'écrou de cette vis nous offrent dans les arts les seuls outils dans lesquels ces deux surfaces se rencontrent; la vis triangulaire notamment va nous fournir une solution facile.

Nous placerons l'axe de la vis  $V$  dans la direction de la droite  $L$ , et cette vis  $V$  taillera sur le pourtour de la rondelle les diverses surfaces  $\Phi \Phi' \Phi'' \Phi'''$ . Ensuite nous placerons l'axe de l'écrou dans la direction de la droite  $L$ , et cet écrou  $V_1$  taillera sur le pourtour de la rondelle cylindrique  $C_1$  les diverses surfaces  $\Phi_1, \Phi_1', \Phi_1'', \Phi_1'''$ .

303. En effet une vis se trouve composée d'un certain nombre de spires équidistantes entre elles; de plus, nous savons par la *pratique des arts*, qu'une vis triangulaire, transformée en un outil propre à tailler, dit *taraud*, au moyen d'entailles faites sur les surfaces supérieures et inférieures de chaque filet, taille parfaitement une rondelle métallique: c'est par ce moyen que l'on construit l'*engrenage à vis sans fin*.

De plus, on sait que pour que la vis puisse tailler la rondelle, il n'est pas nécessaire que l'axe  $A$  de la rondelle et l'axe de la vis soient à angle droit; ces deux axes peuvent faire entre eux un angle aigu. Seulement il faudrait, par l'expérience, déterminer la limite de l'angle aigu sous lequel la vis peut encore tailler avec facilité, car il est clair que lorsque l'axe de la vis est parallèle à l'axe  $A$  de la rondelle, celle-ci ne peut plus être taillée par la vis.

Voyons maintenant à nous servir de l'écrou de la vis pour denter la rondelle.

Si le diamètre de  $C_1$  est plus grand que le diamètre de l'écrou, il faudra évider la rondelle  $C_1$  et lui donner la forme d'un anneau; ensuite envelopper cet anneau par l'écrou, et en pressant l'écrou contre la surface extérieure de cet anneau, on parviendra à tailler et denter cette surface extérieure.

Il faudra ensuite monter l'anneau sur l'axe  $A$  pour former la roue  $C_1$ . Cette opération auxiliaire est évidemment inutile si le diamètre de la rondelle est plus petit que le diamètre intérieur de l'écrou. Le rayon de la rondelle  $C_1$  devra être égal à  $\rho_1 + i$ ,  $2\pi\rho_1$  étant égal à  $nh$ ,  $n$  étant le nombre de dents que la roue  $C_1$  doit porter,  $h$  le pas du filet de l'écrou, et  $2i$  la profondeur de ce filet.



304. L'exécution mécanique de cette idée constituera une machine nouvelle et destinée à tailler un engrenage; l'une des roues étant dentée au moyen d'un vis triangulaire, l'autre roue étant dentée au moyen de l'écrou de cette vis.

Evidemment l'exécution d'une telle machine est possible (1).

Examinons maintenant comment on devra mettre en présence les roues C et C<sub>1</sub>, taillées et dentées au moyen de cette machine, pour former un engrenage.

L'axe de la vis pourra faire avec A de la rondelle à tailler C un angle arbitraire  $\alpha$ . Cet angle une fois choisi, l'axe de l'écrou devra faire avec l'axe A<sub>1</sub> de la rondelle à dent C<sub>1</sub> un angle égal à  $(\alpha - \beta)$ ,  $\beta$  étant l'angle que les deux axes A et A<sub>1</sub> doivent faire entre eux.

Ainsi les deux axes devant être parallèles, l'angle  $\beta$  sera nul, et l'axe de l'écrou devra faire avec l'axe A<sub>1</sub> le même angle  $\alpha$  que l'axe de la vis fait avec l'axe A.

On pourra donc construire un engrenage extérieur composé de deux roues dentées et aptes à transmettre le mouvement de rotation entre deux axes parallèles, ou entre deux axes faisant entre eux un angle  $\beta$ , lequel pourra varier de 0 à 90°.

On voit aussi qu'ayant construit une roue dentée C, on pourra disposer autour de cette roue une suite de pignons C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub>, de rayons différents, ou, en d'autres termes, portant un nombre différent de dents; ainsi C<sub>1</sub> un nombre  $m_1$ , C<sub>2</sub> un nombre  $m_2$ , C<sub>3</sub> un nombre  $m_3$ , tels que leurs axes A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, A<sub>3</sub> ne soient pas situés dans un même plan avec l'axe A de la roue centrale C, et telles encore que les axes A et A<sub>1</sub> faisant un angle  $\beta_1$ ; A et A<sub>2</sub> un angle  $\beta_2$ ; A et A<sub>3</sub>, un angle  $\beta_3$ , les angles  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  étant égaux ou inégaux.

305. Nous obtenons donc ainsi un engrenage dans lequel une roue dentée C pourra conduire en même temps une roue dentée conique C<sub>1</sub>, une roue dentée cylindrique C<sub>2</sub>, et une roue dentée

(1) On peut voir cette machine au Conservatoire des Arts et Métiers, pour lequel M. Olivier l'a fait exécuter d'après ces principes.

*hyperboloïdique*  $C_3$ , car tout ce que nous avons dit est indépendant des positions particulières des axes et tout à fait général. Dans ce système : 1° l'axe  $A_1$  de la roue *conique*  $C_1$  pourra couper l'axe  $A$  de la roue  $C$ , sous un angle variable et en un point variable; 2° l'axe  $A_2$  de la roue *cylindrique*  $C_2$  ne pourra pas être plus ou moins éloigné ou rapproché de l'axe  $A$  de la roue  $C$ ; mais, 3° l'axe  $A_3$  de la roue *hyperboloïdique*  $C_3$  pourra être plus ou moins rapproché ou éloigné de l'axe  $A$  et de la roue  $C$ , et pourra faire avec cet axe un angle variable; cela a lieu parce que dans le premier et le troisième cas on peut faire tourner la roue  $C_1$  ou la roue  $C_3$  autour de l'axe de l'écrou ou de l'axe de la vis dont on s'est servi pour tailler cette roue  $C_1$ , puisque la forme des dents, qui ne dépend que du rayon du cercle primitif et de la forme de la vis, ne sera en rien changée par cette rotation.

On doit ajouter que les *variations* qui peuvent avoir lieu 1° quant à l'amplitude des angles que ces axes peuvent faire entre eux, et 2° quant à la grandeur de la plus courte distance qui peut exister entre ces mêmes axes, ne peuvent avoir lieu qu'entre certaines limites; mais quelque restreintes que ces limites puissent être, suivant les cas particuliers, les *variations* permises offriront toujours, dans la *pratique*, une grande facilité pour la *pose* des axes et la *disposition* des mécanismes.

Remarquons encore que ces engrenages sont à retour. En effet, le filet de vis étant terminé par deux surfaces, si nous désignons la nappe supérieure par  $\zeta$  et la nappe inférieure par  $\Sigma$ , les diverses spires  $\zeta \zeta' \zeta''$  donneront naissance, sur la rondelle, aux surfaces enveloppes  $\Phi, \Phi', \Phi''$ , et les spires  $\Sigma \Sigma' \Sigma''$  aux surfaces enveloppes  $\Pi, \Pi', \Pi''$ . Comme il en sera de même de la roue dentée au moyen de l'écrou, suivant le sens du mouvement, ce seront les surfaces  $\Phi, \Phi', \Phi''$  ou les surfaces  $\Pi, \Pi', \Pi''$  qui agiront, mais toujours dans les conditions voulues.

306. *Engrenage intérieur*. — A première vue, il semblerait que l'engrenage *intérieur* doit être construit par les mêmes procédés mécaniques que ceux au moyen desquels l'engrenage *exté-*

*rieur* a été obtenu, et qu'ainsi il suffira de denter la surface intérieure de l'anneau au moyen de l'écrou, ainsi qu'on avait denté sa surface extérieure lorsqu'on voulait obtenir l'engrenage extérieur.

Mais avec un peu de réflexion, on voit que dans ce cas, l'écrou ne pourrait tailler des dents; car à mesure qu'il travaillerait et qu'on l'enfoncerait dans l'anneau, il détruirait le travail précédent, et, en définitive, on n'obtiendrait qu'une surface cylindrique concave et non pas une suite de dents. Un exemple très-simple peut faire concevoir qu'il doit en effet en être ainsi.

Supposons que l'on veuille construire en relief deux surfaces cylindriques, l'une convexe et l'autre concave. On pourra toujours considérer la surface convexe comme l'enveloppe d'un outil *plan* d'une largeur arbitraire; mais la surface concave ne pourra être considérée que comme l'enveloppe d'un outil plan d'une largeur infiniment petite, en d'autres termes, que comme engendrée par une ligne droite. De sorte que si la surface concave ne peut pas être engendrée mécaniquement par une ligne droite, et que l'on ne puisse employer comme outil qu'un plan d'une largeur donnée, il faudra, pour obtenir cette surface concave, construire la surface convexe et prendre la *contre-épreuve* de cette surface pour obtenir la surface concave demandée.

Tel est, en effet, le moyen qu'il faudra employer pour obtenir l'engrenage *intérieur* destiné à transmettre le mouvement de rotation entre deux axes non situés dans le même plan, du moment qu'on veut employer comme outils une vis triangulaire et son écrou.

Il est évident que si l'écrou ou la vis, en travaillant la surface intérieure d'un anneau, pouvaient denter cette surface, la forme de la surface de la dent obtenue serait la face concave de la surface  $\Phi$ , ou  $\Phi$ , dont on obtient la surface convexe en dentant la surface extérieure du même anneau au moyen de l'écrou ou de la vis.

On devra donc, pour construire l'engrenage intérieur, employer l'un des procédés suivants :

1° Denter la surface extérieure de la petite roue intérieure C au moyen de la vis; puis denter la surface extérieure de la roue C<sub>1</sub> au moyen de l'écrou, tout comme si l'on voulait exécuter un engrenage extérieur; et enfin prendre la *contre-épreuve* C<sub>2</sub> de la roue C<sub>1</sub>; retourner sens dessus dessous la roue C<sub>2</sub> et la présenter à la roue C;

2° Ou denter la surface extérieure de la petite roue intérieure C au moyen de l'écrou; puis denter la surface extérieure de la roue C<sub>1</sub> au moyen de la vis; prendre la *contre-épreuve* C<sub>2</sub> de la roue C<sub>1</sub>; retourner sens dessus dessous la roue C<sub>2</sub> et la présenter à la roue C.

Ce retournement est évidemment nécessaire, puisque la surface des dents prend naissance autour d'une roue dentée, obtenue en faisant tourner de 180° la roue intérieure autour de l'axe de la vis (c'est à cela que revient la construction indiquée). Il faudra donc répéter en sens inverse cette opération en retournant la roue.

307. Si après avoir denté une roue C au moyen d'une vis V, on suppose que la vis V tourne sur son axe B, elle entraînera la roue dentée C et la forcera à tourner autour de son axe A; on aura alors *l'engrenage à vis sans fin*, la vis tangente donnée plus haut; les angles des deux axes pourront différer d'un angle droit.

308. *Du frottement dans cet engrenage.* — Les dents sont, comme nous l'avons dit, toujours en contact par un point dans le système d'engrenage qui vient d'être décrit. Ce sont donc des engrenages de *précision* et non de *force*, se touchant par une ligne.

Le frottement développé par le travail de l'engrenage sera un *frottement de glissement angulaire*, lorsque les axes A et A<sub>1</sub> ne seront pas situés dans un même plan, et feront entre eux un angle  $\epsilon$  plus ou moins aigu, et un *frottement de glissement direct*, lorsque les axes A et A<sub>1</sub> seront parallèles ou se couperont sous un angle  $\epsilon$  aigu ou droit; en d'autres termes, lorsque ces deux axes seront situés dans le même plan.

Le frottement ne sera pas de roulement, car les conditions

pour que le frottement soit de cette nature ne sont pas satisfaites.

ORGANES AGISSANT A L'AIDE D'INTERMÉDIAIRES FLEXIBLES.

309. Les courroies servent à transmettre le mouvement dans un rapport de vitesse constant entre deux axes disposés d'une manière quelconque dans l'espace. Nous avons vu la disposition qui convenait dans le cas de deux axes parallèles; elle conviendrait évidemment encore dans le cas d'une disposition quelconque des axes, si les courroies pouvaient passer du plan d'une poulie perpendiculaire à l'un des axes à celui d'une deuxième poulie disposée semblablement pour l'autre axe, sans échapper, quand l'obliquité de la traction devient sensible, de la gorge des poulies. C'est ce qu'on empêche, grâce à la flexibilité des courroies, à l'aide de poulies-guides, employées accessoirement à celles montées sur les axes de rotation, et qui permettent à la courroie d'exercer son action sur les poulies dans le plan de celles-ci, et, par suite, sans tendre à l'abandonner.

310. Ainsi une courroie exerçant son action suivant la ligne  $Af$  (fig. 264), si l'on veut que cette action se continue suivant une ligne  $Bg$ , disposée d'une manière quelconque dans l'espace,

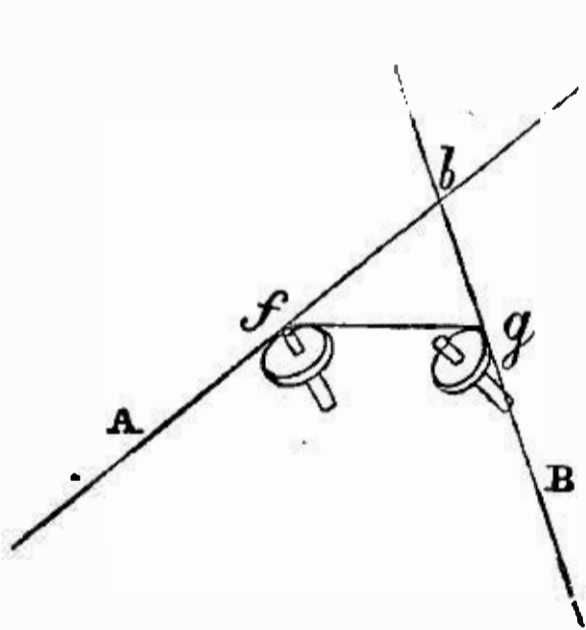


Fig. 264.

par rapport à  $Af$ ; il suffira de joindre deux points  $f$  et  $g$ , et dans les deux plans  $Afg$ ,  $Bgf$  de placer aux points  $f$  et  $g$  deux poulies-guides. Il est clair que la courroie, suivant la direction  $AfgB$  transmettra son action de  $Af$  en  $Bg$ ; les deux brins sortant de chaque poulie seront toujours dans le plan de celle-ci, et, par suite, ne tendront nullement à l'abandonner.e

Il est, d'après cela, toujours facile de transmettre, à l'aide d'une courroie sans fin, le mouvement entre deux axes disposés d'une manière quelconque dans l'espace.

Adoptons perpendiculairement à chacun des deux axes deux

cercles (fig. 265), dont les rayons soient dans le rapport donné des vitesses. Soit  $cd$  la ligne d'intersection des plans de ces deux cercles, prenez sur cette ligne deux points  $c$  et  $d$ , et de chacun de ces points, menez une tangente à chaque poulie. L'ensemble  $ecyhd$  indiquera la disposition qu'on devra donner à une courroie sans fin, qui n'éprouvera que des tractions toujours exercées dans le plan des poulies, pourvu qu'on place en cet endroit deux poulies-guides, l'une dans le plan  $d'f'h$ , l'autre dans le plan  $e'g'e$ .

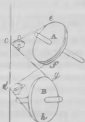


Fig. 265.

Il est à la vérité encore qu'en prenant pour une des poulies des tangentes menées des deux points  $c$  et  $d$ , autres que celles indiquées sur la figure, on changerait le sens du mouvement de l'axe correspondant.

311. Si l'on veut que le système occupe le moins de place possible, il faut prendre pour point de départ, au lieu d'une intersection quelconque de plans perpendiculaires aux deux axes, leur plus courte distance.

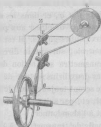


Fig. 266.



Fig. 267.

Soit  $OZ$  la projection de cette plus courte distance sur un plan mené par les plans A et B des couronnes placées à la distance

la plus convenable des points de rencontre de cette ligne avec les deux axes, il suffira, pour que le système soit complet, de placer deux poulies-guides en deux points E et F de la ligne OZ, dont les plateaux seront dans les plans déterminés par les tangentes EA, EB et FD, FC.

Si les plans des couronnes sont réciproquement tangents aux contours de celles-ci, et l'on peut toujours obtenir cette position pour des axes qui ne se rencontrent pas en faisant glisser une des poulies sur son axe, il n'est plus nécessaire, en général, d'employer des poulies-guides, la courroie ne tendant à abandonner la poulie que par une action oblique à l'arrivée sur la poulie, y étant maintenue par le frottement, mais non par une semblable action à la séparation; il se produit une torsion à laquelle se prête sa flexibilité.

312. *Organes agissant à l'aide d'intermédiaires rigides.* — Nous avons dit que la bielle ne pouvait servir à transmettre des rotations dans un rapport de vitesse constant, qu'autant qu'elle reste toujours parallèle à la ligne des centres, c'est-à-dire que les bras des manivelles soient égaux et les axes parallèles. Nous allons bientôt rencontrer la bielle appliquée à transmettre le mouvement circulaire continu entre des axes non parallèles, et nous vérifierons que la condition de parallélisme n'étant pas satisfaite, le rapport des vitesses est alors variable.

## II. Axes non parallèles.

### RAPPORT DE VITESSE VARIABLE.

313. La transmission du mouvement entre deux axes non parallèles offre des difficultés plus grandes dans la pratique, lorsque le rapport des vitesses est variable suivant une loi donnée, que lorsqu'il est constant. Déjà, dans ce cas, nous avons vu qu'on était obligé d'abandonner la solution théorique, à cause de la difficulté de son application. A plus forte raison dans le cas qui nous occupe en sera-t-il ainsi, et trouvera-t-on avantage à substituer à la solution directe, prenant son point de départ

dans deux surfaces coniques ou riglées, déterminées en raison du rapport des vitesses, celle obtenue à l'aide d'un organe intermédiaire, en ramenant le problème à la communication du mouvement entre deux axes parallèles à l'aide d'une roue d'angle; ainsi nous n'aurons pas à nous étendre beaucoup sur le cas actuel.

#### ORGANES AGISSANT PAR CONTACT IMMÉDIAT.

314. 1<sup>o</sup> *Axes qui se rencontrent.* — Si l'on trace, dans deux plans perpendiculaires aux deux axes, deux ellipses se touchant en un point et ayant les axes pour centres, qui se mèneraient par roulement suivant le rapport des vitesses voulu; que, de plus, on décrit ces deux cônes en ayant pour bases ces deux ellipses, et pour sommet le point de rencontre des axes; ces deux cônes, en se conduisant par roulement, feront mouvoir les deux axes dans les rapports de vitesse voulu. Si on veut les armer de dents, il faudra opérer d'après les principes établis en traitant des roues coniques à base circulaire qui s'appliqueront également à ce cas; mais l'on voit que la complication du problème devient trop grande pour la pratique.

315. Nous rapporterons un ingénieux dispositif imaginé par Huyghens pour résoudre un cas particulier de la question que nous traitons, celui où les deux axes se rencontrent à angle droit.

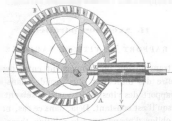


Fig. 268.

D est un arc brisé d'extrémité duquel est fixée une roue dentée (fig. 268), dont le centre de mouvement n'est pas au centre de la



circonférence. Un long pignon LK est adapté à l'axe C qui fait un angle droit avec l'axe B. On voit que le rayon  $\rho$  du pignon est constant et que celui de la roue, n'étant pas au centre de la figure, varie pour les divers points de la circonférence, depuis sa moindre longueur  $r - e$  jusqu'à une longueur maximum  $r + e$ ,  $r$  étant le rayon de la circonférence,  $e$  la valeur de l'excentricité; il en résulte que le rapport des vitesses varie de

$\frac{\rho}{r - e}$  à  $\frac{\rho}{r + e}$ , et le rapport du maximum au minimum est  $\frac{r + e}{r - e}$ .

On peut, par un calcul analogue à celui de l'art. 269, établir les rapports des vitesses pour un angle déterminé de l'axe du pignon et du rayon du cercle.

Dans la machine de Huyghens, c'est le pignon qui conduit et se meut uniformément. On pourrait de même faire partir le mouvement de la roue et aussi varier encore les rapports de vitesse en lui donnant une autre forme qu'une circonférence de cercle.

316. 2° *Axes qui ne se rencontrent pas.* — On peut résoudre le problème dans toute sa généralité en raisonnant comme précédemment. En effet, divisons la plus courte distance des deux axes en deux parties qui soient deux rayons vecteurs de deux courbes elliptiques tracées chacune dans un plan perpendiculaire à chacun des axes, et telles que si elles roulaient angulairement, les deux axes tourneraient dans les rapports des vitesses angulaires voulus. Menons, pour chaque angle de rotation, ainsi que nous l'avons fait, la droite, qui est le lieu des points dont les distances aux deux axes sont dans le même rapport que celui des deux parties en lesquelles la plus courte distance a été divisée; ces droites faisant toujours le même angle avec le plan perpendiculaire sur chaque axe et avec cet axe, en suivant chaque contour elliptique, engendreront deux hyperboloïdes ou deux surfaces réglées analogues qui pourront se mener par contact, et qui auront toujours une génératrice commune, passant par le point de contact situé sur la plus courte distance.

En raisonnant de même, on verrait que la forme des dents peut se déduire des principes posés, mais avec une trop grande difficulté pour la pratique; aussi préfère-t-on toujours les solutions indirectes.

317. La vis sans fin, dans le cas où les angles sont à angle droit, fournit un moyen de varier le rapport des vitesses angulaires de la vis et de la roue;

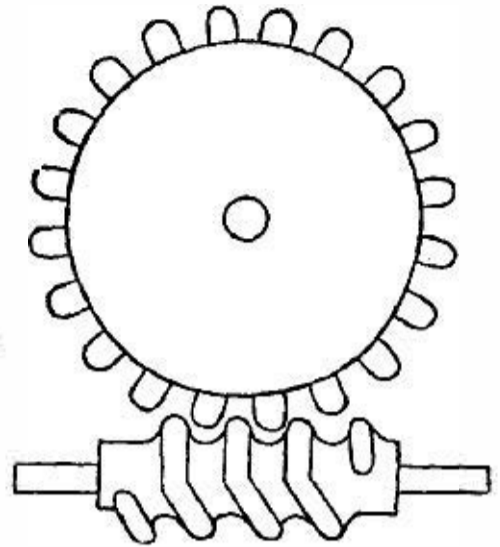


Fig. 269.

il suffit pour cela de faire varier l'inclinaison des filets de la vis. Le rapport des vitesses angulaires de la roue de rayon  $R$  et de la vis (fig. 269), sera :

$$\frac{A}{A_1} = \frac{h}{2\pi R} = \frac{r}{R} \text{ tang. } \theta$$

( $\theta$  étant l'angle de l'inclinaison de l'hélice sur les génératrices du cylindre, dont le rayon est  $r$  et  $h$  le pas variable, toujours

$\frac{h}{2\pi r} = \text{tang. } \theta$ ); si donc on donne à la vis deux inclinaisons,

comme sur la figure, on obtiendra deux vitesses.

Il est clair que le contact ne peut avoir lieu dans ce cas, pour deux inclinaisons successivement différentes, suivant des éléments plans.

#### ORGANES AGISSANT PAR INTERMÉDIAIRES.

318. FLEXIBLES. 1° *Courroies*. — Les courroies pouvant servir à transmettre le mouvement dans toutes les directions, pourvu qu'on les maintienne par des poulies-guides, comme nous l'avons dit, toute la question se réduit à munir les axes de poulies de formes convenables pour que les axes soient dans le rapport de vitesse voulue, ce qui ramène la question à celle que nous avons examinée art. 249, car la fusée peut avoir ses spires dans un plan quelconque.

319. RIGIDES. 2° *Articulations*. — Nous traiterons en détail de la bielle dans le chapitre suivant, et nous nous bornerons ici à

la solution la plus remarquable du problème qui nous occupe, obtenue par une modification de la forme de la bielle, pour la rendre propre à la transmission du mouvement circulaire entre des axes non parallèles. Nous voulons parler du système appelé joint de Cardan ou de Hooke, ou encore joint universel.

Le joint universel est un mode d'assemblage de deux axes qui se rencontrent, qui permet la transmission du mouvement de rotation de l'un à l'autre; il jouit de cette importante propriété de transmettre ce mouvement quand l'angle des deux axes vient à changer, même pendant la durée du mouvement.

La fig. 270 représente le joint universel. Pour en concevoir le jeu, il faut remarquer que quand le mouvement de rotation est imprimé à l'arbre  $Aa$ , cet arbre entraîne avec lui la fourche  $ACc$  qui le termine, ainsi que le croisillon  $Cc$ , dont les branches ont la faculté de tourner sur leurs tourillons respectifs placés aux extrémités de la fourche  $ACc$ ; le système qui réunit l'axe  $Bb$  au croisillon  $Dd$  est semblable. Mais, comme les quatre branches du croisillon sont solidaires, ne forment qu'une seule pièce, il est évident que celles qui servent de support aux branches de la fourche fixée à l'axe  $Bb$  tournent et impriment à cet axe un mouvement de rotation pour tout mouvement de l'axe  $Aa$ .

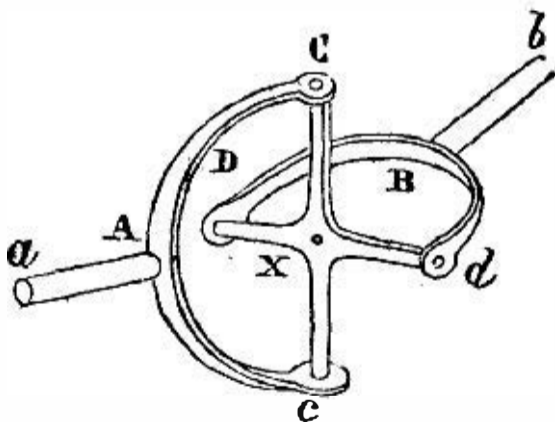
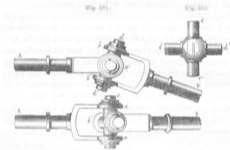


Fig. 270.

La propriété que nous avons indiqué appartenir à ce système de transmettre le mouvement de rotation, quand même l'angle des axes vient à varier, résulte bien clairement de la disposition que nous venons de décrire. En effet, un des axes peut s'incliner suivant une direction quelconque, autour de l'autre axe

que l'on peut toujours considérer comme fixe, par suite de la double rotation possible autour des tourillons, autour de deux axes rectangulaires entre eux, ne'est-à-dire suivant un en ligne quelconque tracée dans un plan dont l'azimut est quelconque, ce qui permet d'obtenir toute inclinaison possible, propriété curieuse et caractéristique de cet assemblage.

C'est à cause de cela que le joint de Cardan est souvent employé comme support, laissant une liberté absolue d'inclinaison en tous sens à la pièce supportée autour du centre du croisillon.



Les axes du croisillon *cc'*, *dd'* peuvent appartenir à une pièce *Y* de forme quelconque (à la forme sphérique (fig. 272) remplit les conditions de résistance convenable), pourvu que leur point d'intersection se confonde avec le point d'intersection des axes *A* et *B* prolongés.

320. Les deux axes étant réunis par ce système et tournant ensemble, si la vitesse de l'axe moteur, den *k*, par exemple, est uniforme, quelle sera la vitesse de l'autre axe? Le nombre de tours en un certain intervalle de temps est bien le même pour les deux axes, mais, que, après chaque tour, les pièces se retrouvent dans la même place; mais quelles sont les variations de vitesse dans chaque tour? c'est ce que nous allons examiner.

Soit l'arbre A conducteur, l'axe  $cc'$  décrit un plan perpendiculaire à A, autour du centre de M. Pendant le même temps, tout point de l'axe  $dd'$  solidaire avec  $cc'$  décrit un cercle autour du même centre dans un plan perpendiculaire à l'arbre B.

Ainsi les droites solidaires  $cc'$ ,  $dd'$  se meuvent autour du centre commun, mais par l'effet des arbres A et B, en décrivant deux plans différents autour de ce centre, l'un perpendiculaire à l'arbre A, l'autre perpendiculaire à l'arbre B; si l'on projette le second cercle sur le plan du premier, il s'y projettera suivant une ellipse.

Soient  $aM$ ,  $bM$  les moitiés des deux axes perpendiculaires l'un à l'autre et solidaires, l'ellipse  $aBa'$  représentera la projection sur le plan décrit par la droite  $aM$  du chemin décrit par l'extrémité de la droite  $bM$  égale et perpendiculaire à  $aM$ . Lorsque la première a décrit un angle  $\alpha M a'' = \alpha$ , la seconde a décrit dans le

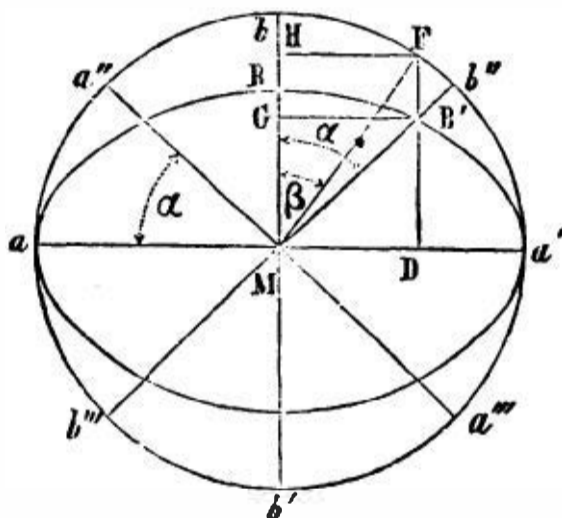


Fig. 273.

plan qu'elle parcourt un angle  $\beta$  qui se projette en  $bMb''$ . Pour trouver la grandeur réelle de cet angle, il faut par  $B'$  élever la droite  $F B' D$ , elle donnera en  $F$  le rabattement du point projeté en  $B'$ , en supposant que l'on ait rabattu sur ce plan de projection le cercle décrit par le point dont  $B'$  est la projection et  $bMF$  représentera en vraie grandeur l'angle  $\beta$  que nous cherchons. Les deux angles simultanément décrits sont donc représentés en vraie grandeur (fig. 273).

L'un suivant  $aMa'' = bMb'' = \alpha$ , les axes  $aM$ ,  $bM$  étant toujours à angle droit.

L'autre suivant  $\angle MF = \beta$ .

Abaissant des points  $B'$  et  $F$  des perpendiculaires sur  $bM$ ,

on a :

$$\frac{B'G}{MG} = \frac{\sin. \alpha}{\cos. \alpha} = \text{tang. } \alpha \text{ et } \frac{FH}{MH} = \frac{\sin. \beta}{\cos. \beta} = \text{tang. } \beta;$$

$$\text{d'où } \frac{\text{tang. } \alpha}{\text{tang. } \beta} = \frac{B'G}{MG} \times \frac{MH}{FH},$$

mais  $FH = B'G$  et comme  $HM = FD$  et  $MG = B'D$ , on peut

$$\text{écrire } \frac{\text{tang. } \alpha}{\text{tang. } \beta} = \frac{FD}{B'D}.$$

Mais entre les ordonnées d'un cercle et d'une ellipse ayant son diamètre pour grand axe, on a (voir *Traité de géom. analyt.*):

$$\frac{FD}{B'D} = \frac{bM}{BM}, \text{ } bM \text{ étant le rayon du cercle décrit sur le grand}$$

axe, et  $BM$  le petit axe de l'ellipse.

Appelant  $\theta$  l'angle des deux plans, le même que celui des deux axes prolongés, on a  $bM \cos. \theta = BM$  ou  $\frac{bM}{BM} = \frac{1}{\cos. \theta} = \text{con-}$

stante, donc enfin  $\text{tang. } \beta = \text{tang. } \alpha \cos. \theta$ .

La figure montre que la position réelle de la droite conduite  $bMb'$  se confond avec sa projection en  $MB, Ma', Mb$  et  $Ma$ . Entre les deux positions  $Mb, Ma'$ , la droite  $Mb$  a d'abord une vitesse moindre que celle de la droite conductrice, puis elle a une vitesse supérieure, et les vitesses angulaires redeviennent égales en  $a'$ . Dans les trois autres quarts de révolution les mêmes circonstances se reproduisent : en ordre inverse (comme l'indique le signe de la tangente) pour le parcours du quart  $a'Mb'$ ; en même ordre pour le parcours du quart  $b'Ma$ , en ordre inverse pour celui du quart  $aMb$ . Ainsi les deux arbres dépendants font une révolution dans le même temps, mais avec des vitesses angulaires différentes, sauf quatre positions pour lesquelles ces vitesses sont égales; la variation des vitesses dépendant de la valeur de l'angle  $\theta$  des deux arbres.

321. Si l'angle des deux axes approche de  $90^\circ$ , la rotation d'un axe tend à tordre les tourillons et nullement à faire tourner la

croix, l'appareil ne peut plus servir. Bien avant cette limite, quand l'angle n'est pas bien supérieur à  $90^\circ$ , les frottements et les torsions qui se produisent dans cet appareil le rendent défectueux pour transmettre de grands efforts. On ne doit pas l'admettre quand l'angle d'un axe et de l'autre prolongé dépasse  $45^\circ$  ou que l'angle mesuré entre les deux axes est inférieur à  $135^\circ$ .

322. Au moyen de deux joints (fig. 274), on peut communiquer le mouvement entre deux axes disposés l'un par rapport à l'autre de manière à faire un angle inférieur à  $135^\circ$ , et avec une grande variété de vitesses du mouvement, à l'aide d'un axe intermédiaire réunissant les deux premiers.

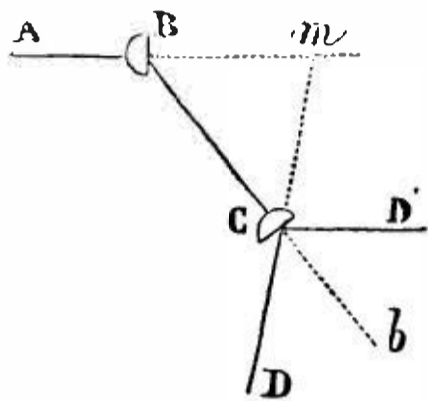


Fig. 274.

Soit  $AB$  l'axe conduisant, assemblé avec un second axe  $CB$  par un joint universel en  $B$ , lequel est réuni semblablement avec un autre axe  $CD$ ; le plan  $ABC$  étant différent du plan  $BCD$ . Soient  $\alpha, \beta, \gamma$ , les rotations des trois axes  $AB, BC, CD$ , les angles successifs étant de grandeur convenable. Le mouvement du second joint  $C$  résultera du mouvement du premier  $B$ , pour lequel on a ( $\theta$  étant l'angle des deux axes  $AB, CB$ ) :

$$\text{Tang. } \beta = \frac{\text{tang. } \alpha}{\cos. \theta}.$$

L'angle de rotation correspondant de  $CD$  étant  $\gamma$  et  $\theta_1$  son inclinaison sur  $BC$ , on a de même :

$$\text{Tang. } \gamma = \frac{\text{tang. } \beta}{\cos. \theta_1} = \frac{\text{tang. } \alpha}{\cos. \theta \cos. \theta_1};$$

et enfin pour des séries de joints réunissant des axes dont les inclinaisons mutuelles seraient  $\theta, \dots, \theta_n$ ,  $\delta$  étant le chemin angulairement parcouru par le dernier, pour l'angle  $\alpha$  parcouru par le premier, on aurait :

$$\text{Tang. } \delta = \frac{\text{tang. } \alpha}{\cos. \theta \cos. \theta_1 \dots \theta_n}.$$

Dans un système de ce genre, toute variation de vitesse peut être obtenue, quels que soient l'angle et la variation de direction

du dernier, en employant des axes intermédiaires convenablement disposés.

Si le dernier axe était parallèle au premier, si par suite on a  $\theta_1 = \theta$  dans un système de trois axes semblable à celui qui est indiqué sur la figure 274e, on a d'abord :

$$\text{Tang. } \beta = \frac{\text{tang. } \alpha}{\cos. \theta}.$$

Pour la seconde relation, il faut remarquer que l'angle  $\beta$  est mesuré à partir d'un rayon de l'axe conduisant qui sert de point de départ, qui est écarté de  $90^\circ$  du premier, la seconde relation devient donc, en partant du même point initial :

$$\text{Tang. } \gamma = \frac{\text{tange} \left( \frac{\pi}{2} + \beta \right)}{\cos. \theta}, \quad \text{or } \text{tang.} \left( \frac{\pi}{2} + \beta \right) = \frac{1}{\text{tang. } \beta},$$

donc enfin 
$$\text{tang. } \gamma = \frac{\cos. \theta}{\text{tang. } \alpha \cos. \theta} = \frac{1}{\text{tang. } \alpha}.$$

C'est-à-dire que, dans ces conditions, les variations de mouvement se balancent de telle sorte que le rapport des vitesses angulaires des axes AB, CD' demeure constant.

323. Quand on ne peut disposer d'un axe intermédiaire, et que l'angle des deux axes est inférieur à  $130^\circ$ , on emploie la disposition dite double joint de Hooke.

Il se compose de deux joints dont la réunion permet la transmission du mouvement, quel que soit l'angle des deux axes (fig. 275).

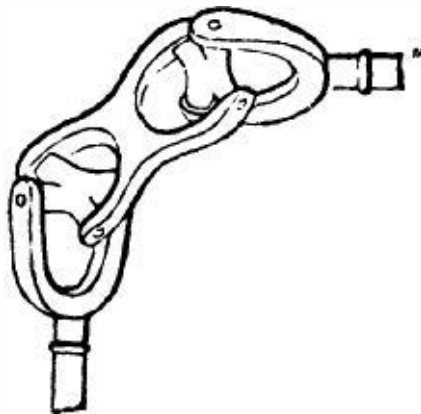


Fig. 275.

Les relations ci-dessus se transforment en chaque instant, l'axe intermédiaire variant de position et par suite les valeurs  $\theta, \theta_1$ . On peut, par ce système, diminuer beaucoup les écarts de la vitesse moyenne. Ainsi le double joint communiquera à deux axes parallèles, ou qui se rencontreront, une même rotation en chaque instant, comme l'indique la symétrie de figure, si l'on a soin de faire en sorte que les deux axes fassent le même angle avec la pièce intermédiaire.



324. Si l'on analyse la forme élémentaire du joint universel, on reconnaîtra facilement que, si on l'emploie dans le cas d'axes parallèles, les deux branches de chaque axe ne servent qu'à la solidité, et qu'une seule paire de leviers fixés aux axes assemblés par une bielle produirait le même mouvement, par une disposition semblable à celle représentée fig. 228.

Le joint de Oldham, donné plus haut, devient le joint de Hooke si les deux axes, au lieu d'être parallèles, se rencontrent et se coupent au centre de la croix. Il n'y a plus alors glissement, mais seulement rotation autour des axes.

On voit qu'en résumé le mérite de la disposition du joint universel est de pouvoir être employée dans des cas d'axes non parallèles, dans lesquels l'assemblage de la bielle par des axes parallèles n'est plus possible.

325. Nous donnerons ici un curieux exemple de l'application du joint double pour faire tourner de la même vitesse deux cercles parallèles dont les axes sont réunis par cet organe. Cette disposition est la base d'un système proposé par un ingénieur suédois pour maintenir constamment dans un plan vertical les palettes des roues des bateaux à vapeur. C'est au seul point de vue de l'élégance de la solution du problème, en tant que mécanisme, que nous en parlons, plutôt qu'à cause de l'importance de l'application proposée, pour laquelle nous doutons qu'on puisse obtenir par ce système une solidité suffisante.

L'axe moteur fait tourner une circonférence; à celui-ci est assemblé par un joint universel un arbre qui, par son autre extrémité, est assemblé d'une manière identique avec l'axe d'un second cercle, parallèle au premier, mais placé plus bas.

Les deux axes tournant simultanément, si l'on assemble chaque palette par deux axes placés l'un à la partie supérieure, l'autre à la partie inférieure, entrant dans des coussinets placés dans chacun des deux cercles, il est évident que, si, partant de la palette placée à l'extrémité du diamètre vertical, et elle-même verticale, on place les autres axes en des points des deux circonférences également distantes des deux points de dé-

part, tous ces axes seront parallèles, et par suite les palettes qui demeurent également verticales. C'est un système qui, disposé

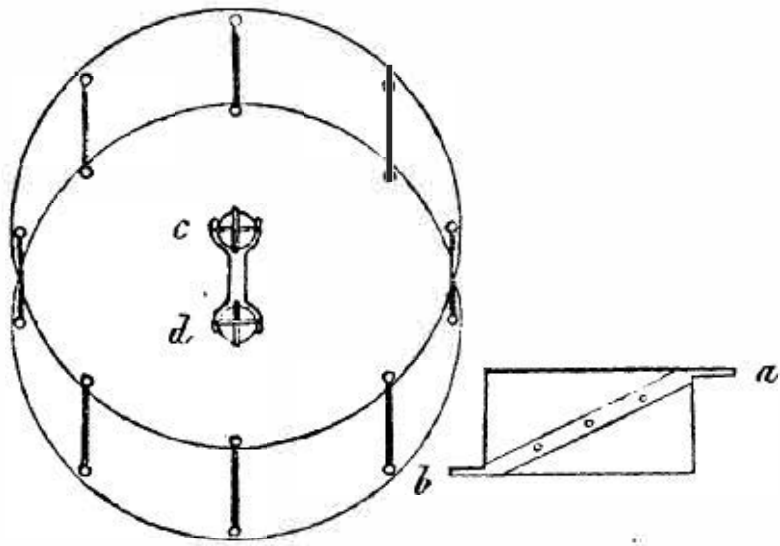


Fig. 276.

sur des circonférences, a quelque analogie avec celui des règles parallèles dont il a été parlé. Formé essentiellement d'axes parallèles entre eux, les règles peuvent évidemment être courbes, comme dans le cas actuel.

326. Les articulations des crustacés et de divers insectes peuvent être citées comme un exemple curieux des principes précédents.

Tandis que les vertébrés ont, à l'intérieur, un système osseux composé essentiellement de leviers et d'articulations, de parties analogues aux crapaudines et à des parties de coussinets des machines recevant des axes, il est curieux de voir ce que ce système devient dans des animaux qui ont le système osseux à l'extérieur, et bien intéressant de retrouver des organes qui n'ont été découverts par les mécaniciens que depuis un petit nombre d'années.

Les articulations de ces animaux sont, en général, des espèces de charnières n'ayant qu'un axe de flexion ; mais ces joints sont souvent groupés de manière à produire des joints composés ayant deux ou trois axes de flexion, et formant par suite des joints universels analogues aux précédents.

Comme exemple nous décrirons, d'après Willis, la patte antérieure du crabe commun.

Elle consiste en réalité en cinq pièces séparées A, B, C, D, E (en négligeant le joint de la pince F), chaque pince étant jointe à la précédente par une charnière. Mais on peut également la considérer comme consistant en deux parties C et E, dont la première est réunie au corps de l'animal par un joint universel qui a trois axes de flexion, et le second réuni au premier par un joint à deux axes ou joint de Hooke.

Cette pièce C est réunie à la pince E par la pièce intermédiaire D, et les axes des joints qui forment cette réunion sont représentés par les lignes 5, 5, entre D et E, et 4, 4, entre C et D. Ces axes se coupent en un point K, et par suite, d'après ce qui précède, E se meut, par rapport à C, autour de ce point et peut se mouvoir autour de tout axe de flexion passant par ce point et situé dans le plan 5 K 4.

Le joint composé qui réunit la pièce C au corps de l'animal est plus compliqué, et, pour montrer sa disposition, nous em-

Fig. 277.

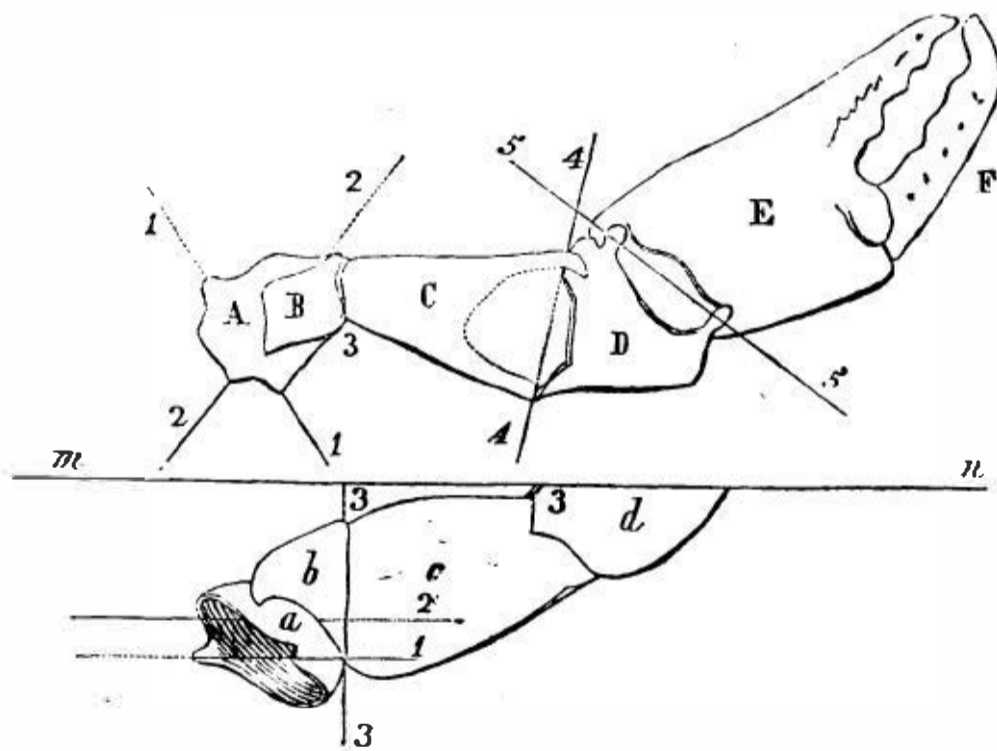


Fig. 278.

ploierons deux plans perpendiculaires entre eux, se coupant suivant la ligne *mn*. La figure 277 étant le plan, la figure 278 est l'élevation

L'anneau A est réuni au corps de l'animal par un joint dont l'axe est en 1, 1, dans le plan et en 1, 1, dans l'élevation. Celui-ci