PREMIÈRE SECTION.

Organes produisant un rapport de vitesse constant.

Position relative des directions des mouvements. Les axes des deux mouvements circulaires peuvent avoir trois directions relatives; être parallèles, se rencontrer, ne pas se rencontrer sans être parallèles, n'être pas situés dans un même plan. Nous passerons successivement en revue ces trois positions relatives des axes.

1° AXES PARALLÈLES.

177. Nous dirons d'abord un mot d'un cas particulier des axes parallèles, celui où les deux axes sont placés dans le prolongement l'un de l'autre. Il suffit évidemment d'assembler d'une manière fixe les deux axes pour obtenir la communication cherchée, si la vitesse doit être la même pour les deux axes. Si elle devait être différente, il faudrait employer un des systèmes que nous allons décrire, d'abord pour transmettre le mouvement de l'axe moteur à un axe auxiliaire parallèle, puis le mouvement de celui-ci au second, dans les conditions de vitesse voulues.

178. *Rouleaux.* Si l'on divise la distance qui sépare les deux axes en deux parties qui soient en raison inverse des vitesses angulaires des deux axes, et qu'avec ces rayons on construise deux surfaces cylindriques, dont les génératrices soient parallèles aux axes; ces deux surfaces étant en contact (en supposant la résistance à surmonter inférieure au frottement de glissement), serviront à mouvoir le second axe à l'aide du pre-

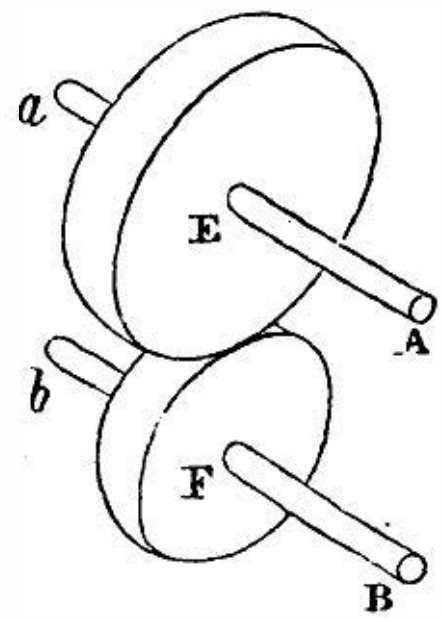


Fig. 164.

mieret avec la vitesse voulue (fig. 164). En effet, les longueurs des circonférences passant au point de contact étant égales, si on appelle ω, ω' les vitesses angulaires, R, R′ les rayons, on aura $R\omega = R'\omega'$, ou $\omega' : \omega :: R' : R$, c'est-à-dire que les vitesses angulaires des arbres sont en rapport inverse des rayons. Pour éviter le glissement dans la pratique, on garnit les circonférences de peau de buffle; toutefois, ce système ne peut servir qu'à transmettre des forces minimes entre des axes rapprochés; pour les autres cas, il faut passer aux systèmessuivants :

179. *Engrenages à coin.* Un nouveau système permet de dépasser cette limite inférieure, tout en conservant une partie des avantages des rouleaux

Ses propriétés reposent sur celles du coin, ou double plan incliné, pour accroitre l'adhérence sans faire croître les pressions, et par suite le frottement des axes, dans la même proportion.

Ainsi, si l'on veut conduire deux axes parallèles par le contact immédiat de deux tambours montés sur ces axes, il faudra, pour éviter les glissements, les presser fortement pour peu qu'il s'agisse de transmettre des forces quelque peu notables, et, par suite, faire naître des frottements considérables sur les axes. Il n'en sera plus de même si l'on creuse dans la couronne extérieure de l'une des poulies une gorge tronconique dont la section est un trapèze, et si on tourne la couronne de l'autre en forme conique (fig. 165), de manière qu'elle puisse s'engager en partie seulement dans la gorge de la première.

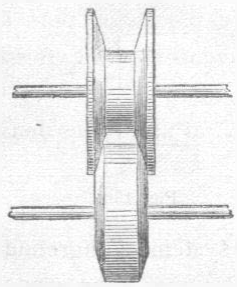


Fig. 165.

Toutes les propriétés du coin, que nous étudierons en détail plus loin, apparaissent ici; c'est-à-dire qu'en raison de l'acuité plus ou moins grande de l'angle commun au vide et au plein des deux roues, dont la section représente un cône tronqué, une pression médiocre sur les axes pourra faire naître une très-

grande pression au contact, et, par suite, une adhérence ou engrènement moléculaire en vertu duquel une roue pourra entraîner l'autre et surmonter la résistance qui s'oppose à son mouvement.

Le principe du système étant établi, cherchons à nous rendre compte des avantages ou des inconvénients de son emploi.

Du glissement. Le caractère le plus remarquable de ce système d'engrenage, c'est que, par suite d'une variation dans les forces, un glissement peut avoir lieu. Cette propriété, qui le rend impropre à être employé pour les mécanismes où il s'agit d'assurer des rotations d'angles voulus, comme dans les appareils d'horlogerie, le rend au contraire extrêmement précieux pour les applications dans lesquelles la force résistante peut éprouver des variations considérables, car alors c'est un glissement qui se produit, et il n'y a plus danger d'une rupture.

Du frottement. Il semble que le frottement de glissement qui s'exerce sur les faces en contact, surtout au delà des circonférences primitives, doive être une cause d'infériorité pour ce système; mais il est à remarquer que dans le pivotement ins tantané des surfaces de contact autour du point moyen qui définit les circonférences primitives, les parties les plus éloignées de ce point s'usent beaucoup plus vite que celles qui roulent seulement, et par suite la face du coin tend à prendre une forme convexe qui tend à réduire beaucoup la valeur du travail du frottement (fig. 166).

Fig. 166.

De l'usure. La rapidité de l'usure dans ce système d'engrenage, et la nécessité du rapprochement graduel des axes pour proportionner toujours la pression et l'adhérence à la résistance à surmonter, paraissent les obstacles les plus notables à l'adoption de ce système pour les grandes machines.

L'inventeur de ce système, M. Minotto, de Turin, y a remédié d'une manière très-satisfaisante, qui n'a d'autre défaut que d'être un peu encombrante. Il munit de deux roues à gorge creuse les

deux axes à mouvoir, et place entre elles (dessus et dessous pour les deux sens du mouvement) des roues à coin, libres de descendre dans les gorges, et chargées d'un poids convenable en raison des efforts à transmettre. Ce poids est minime, étant placé de manière que la roue mise la première en mouvement tende à engager la roue à coin dans la gorge de la roue conduite.

ORGANES OU L'ACTION SE PRODUIT A L'AIDE D'INTERMÉDIAIRES FLEXIBLES.

180. *Courroies*. Si l'on fixe sur deux axes parallèles des tambours ou poulies sur lesquels s'enroule une corde flexible (fig. 167),

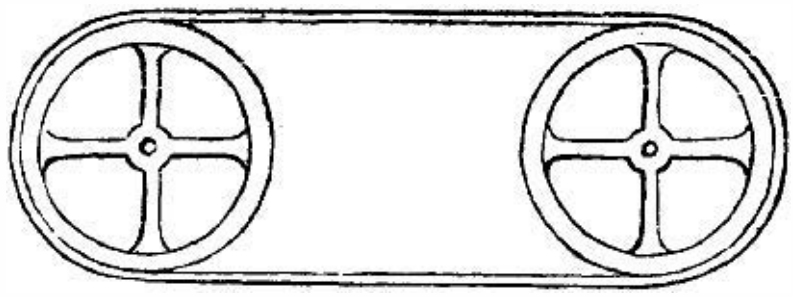


Fig. 167.

ou mieux une courroie de cuir, on aura une solution du problème qui revient à éloigner, grâce à l'intervention pratiquement excellente d'intermédiaires flexibles, les rouleaux précédents, sans altérer en rien les conditions de leur mouvement. Quand on emploie une corde, la gorge de la poulie doit être creuse, mais quand on emploie une courroie plate la circonférence de la poulie doit être bombée, forme qui empêche la courroie d'abandonner la poulie, si la traction est quelque peu oblique, comme nous le montrerons plus loin; si la surface était concave, les arêtes saillantes des bords ne manqueraient pas d'attirer la courroie, pour peu que celle-ci les touchât, et de la détacher bientôt du tambour.

En donnant à la courroie une tension suffisante pour déterminer un frottement supérieur à la résistance à vaincre, le mouvement d'une des poulies produit le mouvement de l'autre, qui tourne dans le même sens que la première.

Quand le mouvement circulaire continu à obtenir doit être de

directionœcontraire à celle duepremier,eonœcroise laœcourroieentre lesdeuxetambours (fig.e169),d'arcœnveloppantéétantplusegrand, pour une mêmeetension, la courroie peut transmettre de plus grandes forces. Un inconvénient propre à cette disposition est que les courroies s'usent par frottement au point de croisement, surtout lors du passage de la boucle ou système analogue qui réunit les deux extrémités de la courroie. On l'amoindrit en donnant à laœcourroieundouble contournement qui fait que les brinseseencontrenteà plat à la croisure et non par leurs tranches. L'avantage de pouvoir transmettre de grandes forces quand les rotations des poulies doivent être nécessairement de même sens peut encore être obtenu en faisant faire plus d'un tour entier à la courroie autour du tambour.

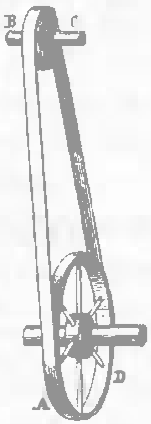


Fig. 168.

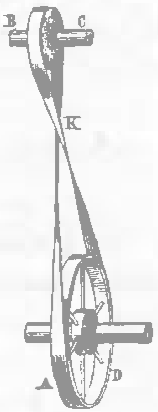


Fig. 169.

Les courroies sont un précieux organe de transmission, parce qu'ellescausentpeu de résistances nuisibles, surtoutquand on emploie des courroies de cuir dont la roideurœst peu considérable,eet qu'il n'y aœaucun frottement deeglissement de la courroie sur les poulies; que si elles peuvent déjà transmettre des forces considérables en raison de leur résistance croissante avec leurlargeur,elles peuvent le faire avec de grandesevitesses, et par suiteecommuniquereune grande quantitéede travail;eenfin, que si laerésistanceecroitepareaccident, elaecourroieeglisseealors suresonetambour,esansqu'iley aitœrupture.

181. e*Vitesses*.e— Laefigureerestant toujours la mêmeequand le mouvement est devenu uniforme, la même longueur de courroie passe sur les deux poulies; R, R′ étant leursrayons, ω, ω′ leurs vitesses angulaires, on aura évidemment pour une même longueur de courroie Lepassant sur chaque poulieedansl'unité

de temps $L = R\omega = R'\omega'$ ou $\frac{\omega}{\omega'} = \frac{R'}{R}$. On transmettra donc d'un axe à un autre une vitesse régulière, dans un rapport voulu, en choisissant des poulies de rayons qui soient dans un rapport inverse de celui des vitesses angulaires.

Les nombres de tours dans le même temps, 1′ par exemple, sont aussi en raison inverse des rayons, car $\omega = \frac{2n\pi}{60}$ n étant le nombre de tours en 1′, 2π la circonférence du rayon 1. De même $\omega' = \frac{2\pi n'}{60}$, d'où $n : n' = \omega : \omega' :: R' : R$.

182. *Mouvements relatifs.* — Les mouvements relatifs seraient évidemment, dans le cas des courroies croisées, les mêmes que si les deux circonférences des poulies étaient mises en contact, l'effet des courroies étant d'obtenir exactement les mêmes mouvements à distance. Ce sont donc ceux étudiés précédemment.

Mais comme l'une des circonférences est à une distance D de l'autre, le chemin parcouru autour du centre, pour un angle au centre ω, n'est plus $R\omega$, mais $(R + D)\omega$, c'est-à-dire que les épicycloïdes se déforment en s'allongeant en raison de cette distance D. Pour le cas des courroies non croisées, le roulement est de même sens pour les deux poulies; les mouvements relatifs sont encore de même nature, et les épicycloïdes encore déformées en raison de la distance des centres. Nous aurons l'occasion de revenir sur ces courbes à la fin de ce livre.

183. — On distingue dans une courroie deux *brins :* le *brin conducteur,* qui s'enroule sur le tambour moteur et se déroule de celui auquel le mouvement est communiqué; et le *brin conduit,* qui se meut inversement. La tension du premier brin dépasse nécessairement celle du second, si ce n'est dans le cas du repos, où la courroie est partout également tendue. On établit en mécanique que la somme des tensions des deux brins est constante, même lorsque l'appareil est en mouvement, et égale au double de la tension de chaque brin au repos.

Nous avons donné (art. 87) une table qui sert à déterminer

les dimensions des courroies; en effet, elle indique l'effort nécessaire pour faire glisser sur un tambour une courroie, les valeurs du rapport K de T à t, de l'effort exercé sur chaque brin d'une corde glissant sur un tambour, glissement qui ne doit pas se produire dans le cas actuel.

Pour établir une transmission de mouvement par une courroie, connaissant l'effort Q à transmettre, l'arc d'enroulement de la courroie qui importe seul et non sa longueur, on aura, pour déterminer la tension suffisante pour que le glissement de la courroie ne puisse avoir lieu : $T - t = Q$ ou $t(K - 1) = Q$, d'où $t = \frac{Q}{K-1}$, d'où on déduira la valeur de t et T, à l'aide de la table, ce qui permettra de déterminer la section des courroies, connaissant la ténacité des substances qui les composent par millimètre carré. En leur donnant une valeur supérieure de $\frac{1}{10}$, pour se préserver des extensions des cordes et courroies, on sera certain d'éviter tout glissement.

Lorsde la mise en mouvement de la poulie motrice, la courroie sur laquelle la poulie glisse d'abord se tend, étant entraînée par la poulie. Dès que la tension est telle que le frottement de glissement est égal à Q, le mouvement de rotation se produit, le frottement de glissement cesse, et il n'y a plus qu'un frottement de roulement; le travail est transmis sans perte notable quant à la roideur des cordes, lorsque les courroies sont convenablement tendues et bien flexibles, le frottement des axes étant la principale résistance qu'il y ait alors à évaluer.

184. *Angle formé par les courroies.* — On peut calculer *à priori* l'angle que feront les deux courroies. En effet, les rayons perpendiculaires aux courroies dans les deux circonférences sont parallèles, puisque la courroie est tangente aux deux poulies. Menant (fig. 171) O′C parallèle à TT′, appelant α l'angle $2TOD = 2T'O'A'$ supplément de l'angle formé par les deux courroies, r_2 le plus grand rayon, r_1 le plus petit, d la distance des centres, on a $d \cos. \frac{\alpha}{2} = r_2 - r_1$, ou $\cos. \frac{\alpha}{2} = \frac{r_2 - r_1}{d}$.

Dans la fig. 170, on a pareillement

$$r \cos. \frac{\alpha}{2} = r_2 + r_1 \text{ ou } \cos. \frac{\alpha}{2} = \frac{r_2 + r_1}{d}.$$

185. *Longueurs des courroies.* — Les longueurs des courroies peuvent s'exprimer à l'aide des éléments qui entrent dans les expressions ci-dessus.

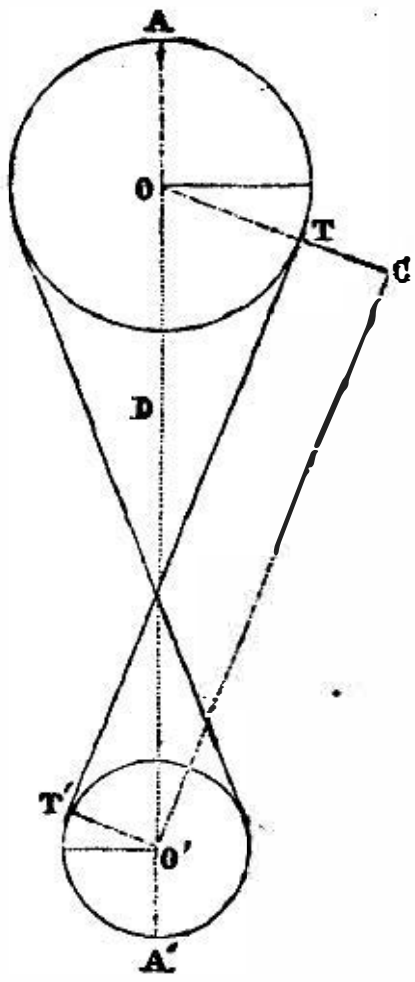


Fig. 170.

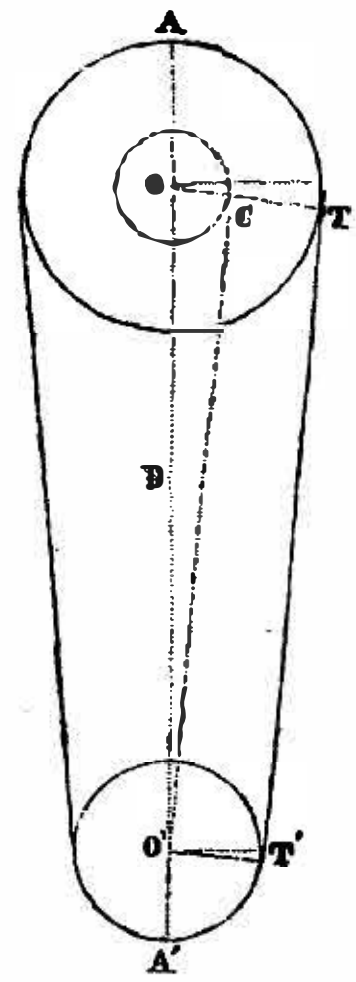


Fig. 171.

En effet (fig. 171), la longueur de la courroie est :
$2\,TT' + \text{arc}\,TA + \text{arc}\,T'A' = 2\,TT' + r_1\,\alpha + r_2\,(2\pi - \alpha)$, ou comme $TT' = d \sin. \frac{\alpha}{2}$, on a : $l = 2d \sin. \frac{\alpha}{2} + r_1\,\alpha + r_2\,(2\pi - \alpha)$.

Et (fig. 170) $l = 2\,TT' + (2\pi - \alpha)\,r_1 + (2\pi - \alpha)\,r_2$ ou $l = 2d \sin. \frac{\alpha}{2} + (2\pi - \alpha)(r_1 + r_2)$.

D'après les valeurs de α déterminées ci-dessus, on voit que, pour une même distance des axes et une même somme des rayons, α reste constant, la longueur de la courroie reste constante, quand la courroie est croisée, ce qui est admis dans les ateliers; mais ceci n'est plus vrai pour les courroies non croisées, puisque la valeur de l'angle α varie quand la somme des

rayons est constante si leur différence varie. M. Roland, qui a redressé cette erreur généralement commise jusqu'ici, a démontré que, dans la pratique, cette différence pouvait devenir très-notable.

186. Nous dirons ici un mot des moyens employés pour réunir les extrémités des courroies.

Fig. 172

Les plus simples sont ceux qui consistent dans une couture faite avec du fil ou des nœuds. Leur inconvénient est de ne pouvoir se prêter facilement à une diminution de longueur de la courroie si celle-ci s'allonge par le travail. C'est pour cela qu'on préfère les boucles, et qu'on a proposé un procédé qui consiste à introduire les extrémités des courroies dans la fente d'un tube métallique; ces systèmes produisant une épaisseur sur une face ne peuvent servir quand on emploie les courroies croisées, puisque les faces opposées de la courroie sont successivement en contact avec les deux tambours.

187. *Forme des poulies.* — Une pression exercée sur la courroie, parallèlement à l'axe des poulies, la déplace avec une

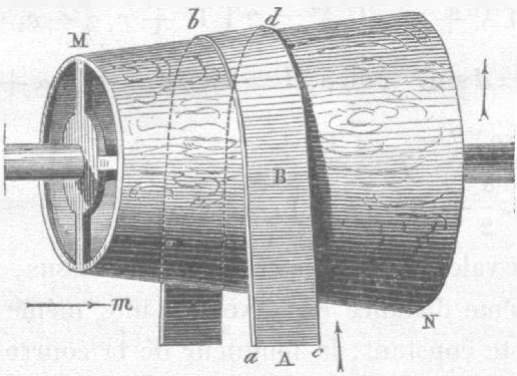


Fig. 175.

grande facilité, non en la faisant glisser transversalement, ce qui exigerait une force considérable et ne serait pas pratiquement

réalisable, mais parce que rien ne le point n'l'enroulement de la courroie sur la poulie se déplace latéralement à chaque tour. C'est un des grands avantages de ce système que la courroie puisse ainsi se transporter avec un petit effort, et nous verrons, au livre III, le système de poulies folles, tournant librement sur l'axe, qu'on place à côté des poulies fixes, et qui permettent d'obtenir à volonté le repos ou le mouvement de l'axe par le déplacement de la courroie.

Si une courroie passe sur une poulie conique, comme le cercle décrit sur le cône par le bord gauche de la courroie ab est de rayon moindre que celui décrit par le bord droit cd (fig. 175), il en résulte une traction, une composante dans le sens de la largeur de la courroie qui tend à la faire avancer dans le sens de la flèche m.

On voit donc que si l'on donne à la poulie la forme de deux troncs de cône adossés par la grande base, la courroie se sera sollicitée dans deux sens opposés, par suite se maintiendra parfaitement sur l'arête la plus élevée. La forme bombée usitée dans les ateliers de construction est équivalente à celle-ci.

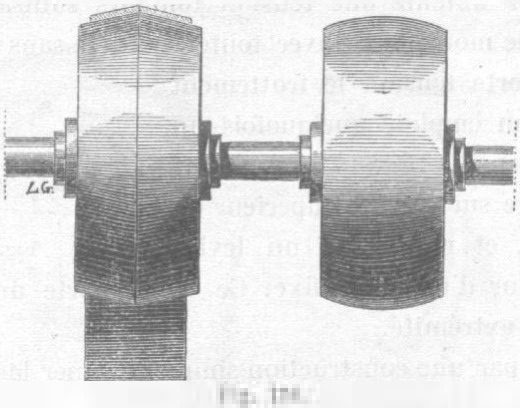


Fig. 175.

188. *Largeur des courroies.*— La largeur des courroies doit être, pour une même substance et un même enroulement, en raison de l'effort exercé. C'est surtout en augmentant la vitesse qu'on accroit la quantité de travail transmis par une courroie, mais quand les limites pratiques de diminution d'une des poulies sont

atteintes et insuffisantes, c'est la largeur et jamais l'épaisseur qu'on doit augmenter, puisqu'en diminuant la flexibilité on augmente le travail résistant.

Pour une largeur donnée, lors de la transmission régulière d'une quantité de travail déterminée, il est évident que chaque unité de largeur de la courroie transmet une même partie de l'effort, et que ce sont les frottements qui correspondent à la somme de ces tractions, qui sont supérieurs aux efforts transmis en chaque instant, puisqu'il n'y a pas glissement.

Si, tout étant ainsi disposé, on diminue la largeur de la courroie sur la poulie (ce qui peut facilement s'exécuter à l'aide d'un des systèmes que nous étudierons au livre III), on arrivera bientôt à une limite où le frottement étant moindre que l'effort à transmettre, il se produira un glissement pour une limite déterminée de travail résistant. Lorsqu'il pourra diminuer avec la vitesse, il s'établira un nouvel état d'équilibre dynamique plus ou moins stable, système défectueux en ce qu'il sera accompagné de glissement, mais qui pourra être utile passagèrement dans quelques cas particuliers de la pratique.

189. Pour obtenir une tension toujours suffisante, afin de déterminer le mouvement avec toute certitude sans accroître par une trop forte tension le frottement des axes, on emploie quelquefois un rouleau de tension (fig. 177), reposant par sa gorge sur le brin supérieur de la courroie, et monté sur un levier mobile autour d'un point fixe. Ce levier porte un poids suspendu à son extrémité.

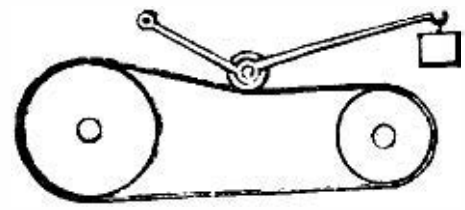


Fig. 177.

On peut, par une construction simple, évaluer la tension produite par le poids suspendu à l'extrémité du levier (produisant l'effet d'un poids Q estimé sur la poulie). Les tensions égales des deux parties du brin de la courroie OA et OB sur lequel s'appuie le rouleau (fig. 177), et le poids Q se faisant équilibre,

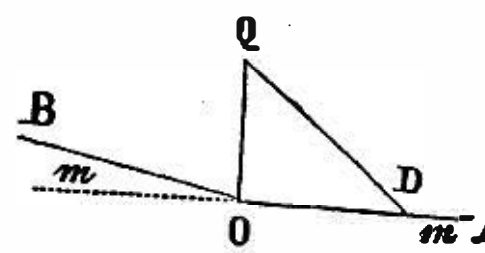


Fig. 178.

puisque la figure ne change pas de forme, la direction de ce poids est la bissectrice de l'angle AOB, qu'il est facile de relever sur la courroie. Si l'on prend une longueur OQ pour représenter le poids Q, et qu'on mène par le point Q une parallèle à OB, on obtient une droite OD qui mesure la tension de la courroie, ou analytiquement δ étant l'angle BOA, Q le poids et S la tension de la courroie, $Q = 2\,S \cos. \frac{\delta}{2}$. Il est donc facile de régler cette tension en faisant varier la charge Q.

L'emploi du rouleau de tension peut permettre de faire varier au besoin l'écartement des poulies (en raison de l'inflexion de la courroie), sans que leur mouvement de rotation varie dans leurs diverses positions, la corde ne faisant que se tendre et relever le poids qui sert toujours à déterminer le mouvement.

190. *Chaînes à la Vaucanson.* — Quand les forces à transmettre sont assez considérables, la vitesse petite et les axes éloignés, on remplace les poulies par des roues garnies de saillies. Les deux roues sont réunies par une chaîne sans fin en fer, formée habituellement de petits rectangles entrelacés (fig. 179), dans lesquels entrent les saillies des roues. Une de celles-ci ne peut se mouvoir sans entraîner l'autre. Ce système, qui engendre beaucoup de frottements, n'est pas ordinairement employé dans les parties des machines qui sont toujours en mouvement.

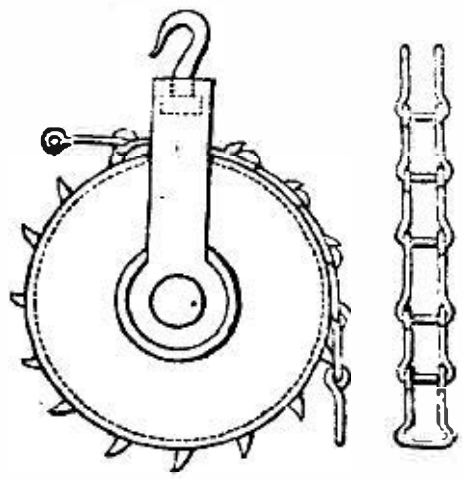


Fig. 179.

Dans ce système, comme avec les courroies, la même longueur de chaîne, passant sur les deux roues pendant le même temps, vient toujours coïncider avec des arcs égaux en longueur absolue $R\omega$, $R'\omega'$, et on a toujours $\frac{\omega}{\omega'} = \frac{R'}{R}$.

191. *Des chaînes.* — Il importe d'entrer dans quelques détails relativement aux divers genres de chaînes qui se rencontrent dans nombre de machines et qui remplacent quelquefois les

cordes, dont l'extensibilité est un grave défaut dans certains cas.

Les chaînes du commerce sont composées d'anneaux oblongs, successivement perpendiculaires les uns aux autres; si elles doivent s'enrouler autour d'une poulie, une rainure devra donc être pratiquée dans la gorge de celle-ci pour les recevoir. Les chaînes plates sont formées de plaques percées de deux

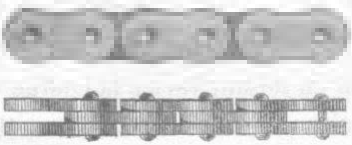


Fig. 180.

trous, dans lesquels passent des anneaux qui font fonction de boulons-tourillons. Ces chaînes peuvent s'enrouler autour d'une poulie circulaire, ou mieux encore de forme polygonale, portant des faces de largeur égale aux côtés des plaques.

Enfin les chaînes les plus parfaites sont celles dites anglaises (fig. 180). Elles se composent de séries de plaques égales, au nombre de trois au moins, en plus grand nombre s'il s'agit de surmonter de grandes résistances, percées de trous au centre des portions demi-circulaires qui les terminent. Ces plaques sont disposées de manière que les extrémités antérieures des plaques extérieures correspondent aux extrémités postérieures des plaques intérieures et inversement; elles sont assemblées par des boulons qui traversent les trous circulaires percés au centre de ces extrémités. C'est autour de ces boulons que les éléments successifs peuvent tourner.

Les chaînes plates ou formées de plaques articulées dont nous venons de parler, et qui, par la multiplication des plaques élémentaires, peuvent servir à surmonter des résistances extrêmement considérables, ne pourraient guère être employées pour soulever les fardeaux au moyen du treuil ou du cabestan, parce qu'il faut alors qu'elles puissent s'infléchir dans tous les sens. Les chaînes à mailles du commerce offrent bien cet avantage, mais elles se rangent difficilement sur la surface du cylindre d'un treuil. M. Neveu a fort heureusement surmonté cette difficulté par l'emploi d'un treuil dont la circonférence peut recevoir

trois chaînons à plat (fig. 181), et dont les parties plus resserrées peuvent recevoir trois chaînons de côté. La chaîne n'ayant pas besoin de s'enrouler plus d'un tour, puisque tout glissement devient impossible par cette disposition, l'action se produit avec une parfaite régularité; ce qui n'a pas lieu pour des chaînes ordinaires et des cylindres sur lesquels les tours de la chaine s'ajoutent de telle sorte que les saillies des maillons ne correspondent bientôt plus aux vides destinés à les recevoir, par l'effet des irrégularités de la chaine qui vont en s'accumulant.

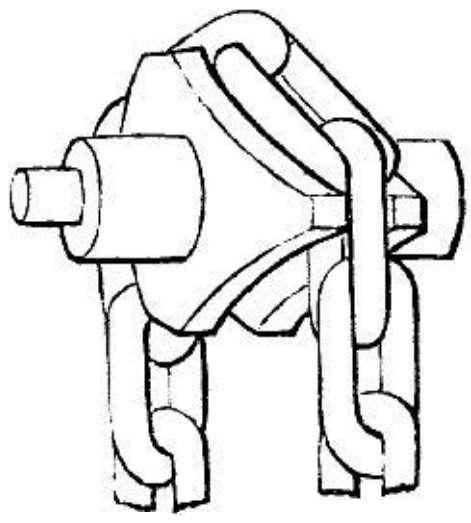


Fig. 181.

192. *Frottement.* — Si l'on compare au point de vue du frottement les diverses chaines, celles du commerce formées de maillons placés dans les plans perpendiculaires entre eux sont préférables aux chaînes plates. En effet, tandis que, dans celles-ci, chaque plaque en tournant autour du boulon qui l'assemble avec la précédente comme autour d'un tourillon, produit un frottement de glissement, chaque maillon, dans la chaine commune, accomplit son mouvement de rotation autour du précédent par un simple roulement; et si l'angle des deux maillons consécutifs est assez petit (si la longueur des maillons de la chaîne a été convenablement proportionnée au diamètre du cylindre autour duquel se fait l'enroulement) pour que le point de contact définitif n'atteigne pas la limite où le frottement de glissement commence, on doit concevoir comment il est possible qu'il n'y ait que simple roulement pendant toute la durée du ploiement de la chaine.

Organes où l'action a lieu par contact immédiat, par la poussée de courbes.

ENGRENAGES PLANS. (GÉNÉRALITÉS.)

193. Le moyen le plus usité de communiquer le mouvement circulaire d'un axe à un autre avec la condition que les vitesses

soient dans un rapport déterminé, surtout quand il s'agit d'efforts considérables; et de faire qu'un axe ne puisse jamais se mouvoir indépendamment de l'autre, consiste à monter sur ces axes deux roues tangentes entre elles. Chaque roue porte des saillies qui s'engagent entre les intervalles des saillies de l'autre roue; le mouvement d'une des pièces est ainsi rendu solidaire de celui de l'autre. Ce dispositif constitue l'engrenage (fig. 182).

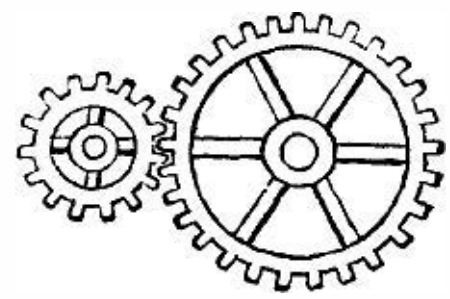


Fig. 182.

On appelle *cercles primitifs* les deux cercles tangents, tracés avec des rayons obtenus en divisant la ligne qui joint les deux centres, c'est-à-dire les points de rencontre d'un plan perpendiculaire aux deux axes avec ceux-ci, dans le rapport inverse des vitesses angulaires des deux axes. La théorie des engrenages ou plutôt l'application au tracé des engrenages des résultats de la théorie des mouvements relatifs que nous avons exposée, consiste à trouver des formes de courbes portées par le centre telles que le rapport des vitesses angulaires soit constant, que le mouvement ait lieu de la même manière que si les deux circonférences tracées avec les rayons obtenus en divisant la ligne des centres en raison inverse des vitesses, se conduisaient l'une l'autre par simple contact. On aura donc alors $R\omega = R'\omega'$; c'est-à-dire que des longueurs égales des deux circonférences passent au point de contact, ce qui revient à dire qu'*un point quelconque sur l'un ou l'autre des cercles primitifs doit parcourir dans un même temps des arcs égaux;* que des points des deux circonférences doivent avoir à chaque instant des vitesses absolues égales.

194. *Transmission du mouvement circulaire par deux roues dentées.* — Si nous considérons les deux cercles primitifs comme les contours de deux roues d'épaisseurs égales, comme les bases parallèles de deux tranches cylindriques qui se toucheraient suivant une arête, il faudra armer ces deux roues de saillies qui fassent corps avec elles, qui soient comme elles terminées par des surfaces cylindriques ayant pour arêtes des droites parallèles

aux axes de rotation, et pour profils des faces qui agissent l'une sur l'autre, des courbes déterminées comme nous l'avons indiqué. Ce sont ces saillies qui sont l'une à l'autre enveloppe et enveloppée, qui transmettront l'effort moteur d'un axe à l'autre et qui portent le nom de *dents*. Le système de deux roues dentées constitue un engrenage.

Il ne suffit pas pour tracer un engrenage de déterminer les profils d'un couple de dents opposées, de manière que la condition générale, la constance du rapport des vitesses angulaires, se trouve obtenue, question résolue par ce qui précède. Ces dents, en effet, ne peuvent avoir qu'un développement limité; elles ne seront en prise que pendant une certaine partie de la révolution entière; il faudra donc qu'à l'instant où elles se sépareront, deux autres saillies semblables aux premières viennent entretenir sans à-coups et d'une manière uniforme la rotation commencée. Ce qui revient à dire qu'il faut en réalité que deux dents au moins puissent être en contact en même temps.

195. La question à résoudre est donc celle-ci :

Quels doivent être, pour un rapport de vitesses angulaires donné, le nombre, l'espacement, les profils, les dimensions des dents sur chacune des deux roues qui composent un engrenage?

Définissons d'abord les éléments de la question. Une dent a pour *base* l'arc de circonférence primitive qu'elle intercepte. Sur la circonférence primitive A (fig. 183), les arcs tels que *eg*, etc., seront les bases des dents. On les nomme aussi le *plein* de la roue, en même temps qu'on désigne par l'expression le *vide* de la roue les arcs intermédiaires, les intervalles tels que *ef;* la somme d'une base et d'un intervalle, l'arc *gf* par exemple, forme une division entière; sur une même circonférence toutes les divisions sont égales comme toutes les dents pareilles. Chaque dent est terminée par deux profils égaux et symétriques, si l'engrenage que j'appellerai alors symétrique doit fonctionner dans les deux sens; elles peuvent être dissemblables, si le mouvement doit toujours avoir lieu dans une seule et même direction; dans ce cas, les profils des faces qui n'ont pas d'action à produire sont arbitraires, à la seule

condition de laisser aux dents une saillie et une résistance convenables, sans gêner le mouvement des dents de la roue opposée.

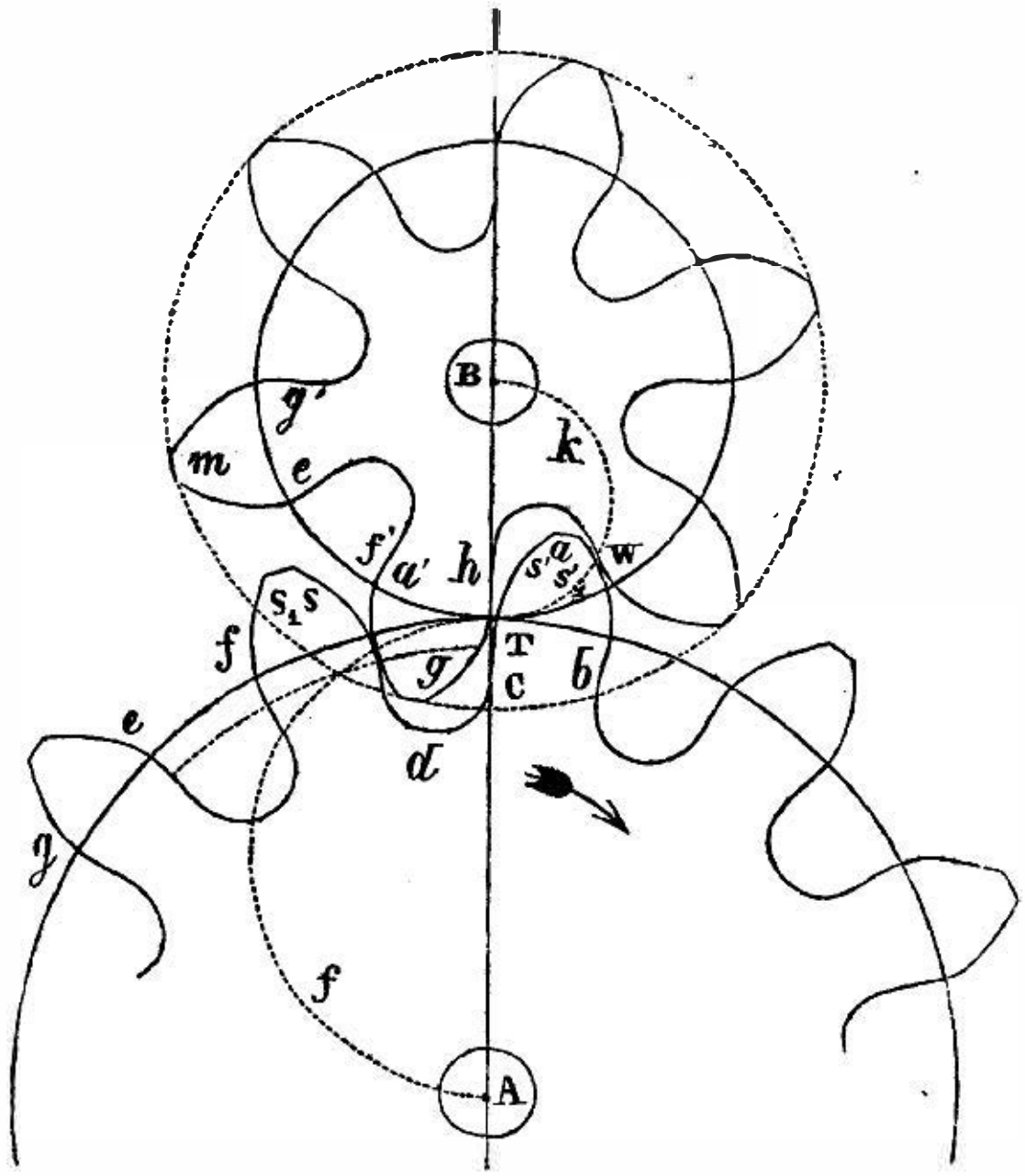


Fig. 183.

Courbe de raccord. — Les profils en regard de deux dents consécutives se raccordent, en général, à l'intérieur de la circonférence primitive par une ligne courbe ou brisée que les dents de la roue opposée ne doivent jamais atteindre.

Dents échanfrinées. — Lorsque les profils des deux côtés de la dent se coupent sous un angle aigu, lorsque l'extrémité des dents présente ainsi une arête tranchante, cette arête doit toujours dans l'exécution être adoucie. On fait plus, on abat ordinairement les extrémités trop faibles pour résister à de fortes pressions; les dents sont alors *échanfrinées*. La troncature se raccorde quelquefois par des arcs de cercle : dans aucun cas elle ne doit être terminée par des arêtes vives.

196. *Égalité des divisions sur deux roues qui engrènent.* —

Déterminons maintenant dans un engrenage donné les éléments qui viennent d'être définis. Soient sur les circonférences primitives des deux roues qui engrènent p, p', p'', etc., les divisions toutes égales entre elles de la première; q, q', q'', etc., les divisions pareillement égales de la seconde. Pour que les mouvements angulaires conservent entre eux un rapport invariable, les arcs des deux circonférences, qui traversent simultanément la ligne des centres, doivent, ainsi qu'on l'a vu, être égaux en longueur. Or, considérons une première couple de dents telles que a, a' en prise sur la ligne des centres, par conséquent au contact de deux circonférences primitives et à l'origine de deux divisions correspondantes. Lorsqu'une seconde couple de dents a_1, a'_1 sera venue remplacer la première, les divisions entières p, q auront traversé la ligne des centres; ces divisions, et par suite toutes les autres, sont donc égales, *la longueur absolue des divisions doit donc être la même sur deux roues qui engrènent.*

197. *Rapport du nombre des dents sur les deux roues.* — Il suit de là que les nombres de divisions ou de dents *sont pour chaque circonférence en raison inverse des vitesses angulaires données, ou du nombre de tours entiers que chaque roue doit faire dans un temps donné.* En effet, en appelant R, R′ les rayons primitifs, ω, ω' les vitesses angulaires, et en désignant de plus par n et n' les nombres de divisions ou de dents, chaque division de la circonférence O a pour longueur $\frac{2\pi R}{n}$, chaque division de la circonférence O′, $\frac{2\pi R'}{n'}$; ces deux quantités doivent être égales, comme on vient de le voir. Ainsi $\frac{2\pi R}{n} = \frac{2\pi R'}{n'}$ ou $\frac{n}{n'} = \frac{R}{R'} = \frac{\omega'}{\omega}$ d'après la condition générale des engrenages. Les plus petits nombres entiers qui expriment le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$, car n et n' sont nécessairement entiers, sont donc les plus petits nombres de dents par lesquelles ce rapport de vitesse puisse être obtenu.

Si d est la distance des axes et μ le rapport $\frac{n}{n'}$ du nombre de

dents, on a :

$$R + R' = d, \frac{R}{R'} = \mu, \text{ d'où } R = \frac{\mu d}{\mu + 1} \text{ et } R' = \frac{d}{\mu + 1}.$$

198. *Limites des bases des dents.* — Que l'engrenage soit ou ne soit pas symétrique, la plus grande base que les dents d'une roue puissent avoir, mesurée sur la circonférence primitive, est l'intervalle des dents sur la roue opposée. Il est clair qu'alors la partie postérieure de la dent d'une roue et l'extrémité d'une division de l'autre roue arriveraient en même temps à la ligne des centres; ces points passeraient en même temps par le point de contact des circonférences primitives. Or une dent ne peut empiéter sur une dent de l'autre roue : chaque intervalle devra donc être plus grand que la base opposée (dans la pratique); l'égalité que nous supposons ne peut être qu'une limite.

Soient B, B′, les bases, I, I′, les intervalles sur les deux roues; sur chacune d'elles la somme d'une base et d'un intervalle forme une division entière, on a donc :

$$B + I = \frac{2\pi R}{n} = \frac{2\pi R'}{n'} = B' + I'.$$

De là on peut tirer la valeur de I — B′, des différences égales et nécessairement positives (nulles à la limite, comme on vient de le voir) qui constituent le *jeu* de l'engrenage. Soit J cette différence, ce jeu, et l'on aurae $J = \frac{2\pi R}{n} - (B + B') = \frac{2\pi R'}{n} - (B + B')$ = *la longueur commune des divisions, moins la somme des bases.* Ordinairement on indique seulement le rapport de l'amplitude du jeu à l'amplitude des divisions. Ce rapport dans la pratique est compris entre $\frac{1}{12}$ et $\frac{1}{16}$.

199. *Détermination des profils par lesquels se fait la poussée.* — Les considérations géométriques exposées précédemment, fournissent la relation des profils opposés de deux dents en prise. Pour que la condition générale des engrenages soit remplie, pour que tous les points des circonférences primitives parcourent constamment des arcs égaux, il faudra, si le profil de l'une des dents est donné, considérer cette courbe comme une

enveloppée dont le profil de l'autre dent sera l'enveloppe dans le roulement d'une des circonférences primitives sur l'autre supposée immobile.

Lorsque l'engrenage devra être symétrique, les profils des deux côtés des dents des deux roues qui agissent l'une sur l'autre, symétriques eux-mêmes, seront l'un par rapport à l'autre sur chaque roue enveloppée et enveloppe; en sorte que si le jeu de l'engrenage était nul, si la base des dents d'une roue était égale à l'intervalle des dents de l'autre roue, le contact aurait lieu en même temps des deux côtés de la dent. Ce mouvement, que les moindres irrégularités arrêteraient dans la pratique, n'est ici qu'une limite, qu'une abstraction de la théorie.

En réalité, la base d'une dent, comme on l'a vu, sera toujours plus petite que l'intervalle entre deux dents de l'autre roue, en sorte que les profils des dents ne se toucheront que d'un côté; mais leur écartement ou le jeu devra toujours être très-petit, car il faut n'enlever que le moins possible à l'épaisseur, par suite à la résistance des dents. On doit encore ajouter que dans plusieurs cas, les roues tout en continuant de marcher dans le même sens, par de simples variations dans leur vitesse, se trouveront alternativement menantes et menées. Or il importe de diminuer autant que possible les chocs qui résultent de ces rencontres. C'est à quoi l'on parvient en ne laissant au jeu que ce qu'il faut pour les imperfections de l'exécution pratique.

200. *Limite intérieure de l'entaille qui sépare deux dents sur une même roue.* — Une dent, lorsqu'elle se termine par une pointe telle que t (fig.e184), ne doit jamais pousser par cette pointe; de plus il faut que, pendant la poussée qui se fait par les faces de la dent, la pointe ne rencontre pas d'obstacle, que son passage soit constamment libre. L'entaille pratiquée dans la roue O, par exemple, au delà du point m_1, pour recevoir la dent bte, aura donc pour limite le lieu de toutes les positions relatives qu'à chaque position du contact le long des faces s ou s_1 de l'autre roue la pointe t viendra prendre. Or on obtiendra toutes les positions relatives des profils, pendant leur mou-

vement, toutes les positions de leur contact, en faisant rouler $\alpha' 6$ sur $\alpha 6$. Dans ce roulement, la pointe t, considérée comme un point extérieur lié au cercle O′, décrira une portion d'épicycloïde allongée dont nous avons donné le tracé. Cette courbe est donc la limite de l'espace nécessaire.

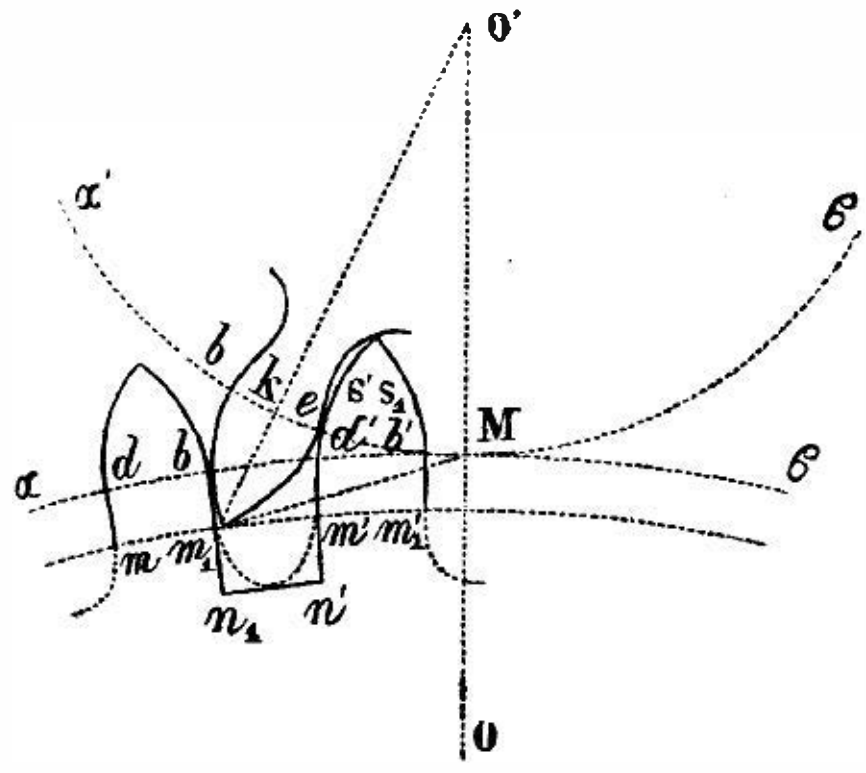


Fig. 184.

Cette courbe se raccorde au point m_1 avec le profil bm_1. En effet, au point m_1, lorsque le contact a lieu entre ce profil et l'extrémité de bt, tM est la normale commune à l'enveloppée bt et à l'enveloppe bm_1. Mais en considérant le point extrême t comme décrivant l'épicycloïde allongée dans le roulement de $\alpha' 6'$, tM est encore la normale à cette dernière courbe en m_1. Les courbes bm_1 et $m_1 m'$ ont donc en m_1 une normale et par conséquent une tangente commune.

Lorsqu'on a déterminé la limite intérieure d'un premier profil s_1, tous les profils homologues, tournés dans le même sens, se termineront sur une circonférence passant par m_1 et concentrique avec $\alpha 6$. Si l'engrenage est symétrique, la même circonférence sera également la limite intérieure des profils de l'autre côté des dents.

Si l'on considère comme une seule courbe le contour continu $bm_1 m' d$, qui termine l'espace compris entre deux dents de la circonférence O (à la limite où le jeu étant nul, la base be est

égale à l'intervalle bd'), on peut dire que ce contour entier est l'enveloppe du contour entier de la dent opposée bte, la portion m, m' étant considérée comme enveloppe du seul point t; avec une interprétation semblable, la même chose sera vraie si la dent bte, échanfrinée par exemple, offre des lignes brisées. Cela sera vrai encore lorsque les profils des deux côtés de la dent ne seront pas symétriques, et la portion d'enveloppe correspondant à la portion d'enveloppée te, par exemple, sera dans l'engrenage non symétrique lui-même, la limite extérieure des profils s', du reste alors arbitraires.

Il est inutile d'ajouter que le développement de la partie saillante des dents de la roue O déterminera la limite des entailles ou creux de la roue O′, comme les saillies bt de la roue O′ viennent de limiter les profils et les creux de la roue O.

201. *Comment sont terminés dans une roue pleine les entailles et les creux.* — Les limites que nous venons de déterminer ne doivent jamais être atteintes; les entailles doivent toujours pénétrer plus avant dans une roue pleine, dépasser l'épicycloïde allongée $m, t\, m'$ pour que l'engrenage puisse marcher sans danger.

Dans la pratique, afin de ne pas ajouter sans utilité réelle aux difficultés d'exécution, il suffira le plus souvent de prolonger l'entaille en ligne droite, suivant la direction des rayons allant des points m, m' au centre de la roue, jusqu'à une distance d'une circonférence un peu plus grande que la saillie maximum kt des dents de l'autre roue. Une ligne droite ou un arc de cercle concentrique avec O′ complète le contour de raccordement $m, n, n'\, m'$.

Lorsque cette construction donne un angle même très-obtus en m ou en m', on devra l'adoucir, sauf à ce que les dents ne puissent se trouver en prise qu'un peu plus près de la circonférence primitive.

202. *Du sens du mouvement.* — Dans ce qui précède nous avons, en général, supposé que nous prenions pour circonférences primitives deux circonférences qui se touchaient en un point situé entre les deux centres.

On peut également considérer des circonférences dont le point de contact soit situé au delà des deux centres, les rayons devant toujours être dans le rapport des vitesses.

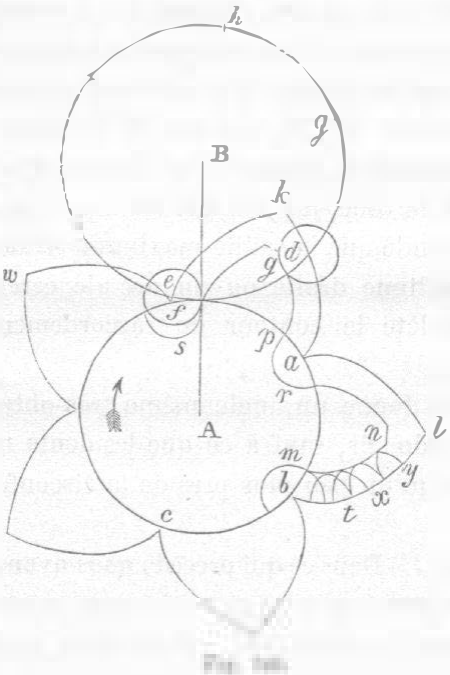
Dans le premier cas les engrenages sont extérieurs, et les deux circonférences marchant l'une vers l'autre, les rotations des deux axes sont de sens différents; quand elles se doivent être de même sens, il faut employer une roue intermédiaire (ce qui se fait le plus souvent), ou adopter la solution du second cas.

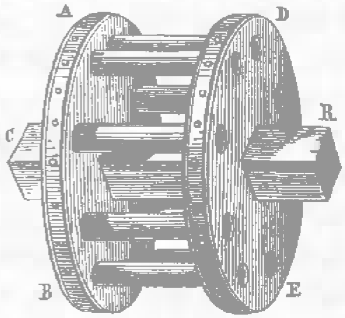
Dans ce second cas les engrenages sont intérieurs, les axes tournent dans le même sens.

Ces deux cas doivent être examinés pour les applications, et leur discussion montrera les raisons qui font préférer le plus souvent dans la pratique les engrenages extérieurs.

DÉTAILS SPÉCIAUX SUR LES DIFFÉRENTS ENGRENAGES CYCLOÏDIQUES.

Différentes courbes, qui correspondent aux cas les plus sim-





ples exposés dans l'étude géométrique, sont adoptées dans la

pratique comme profils de dents. Elles constituent autant d'engrenages particuliers.

203. *Engrenages à lanterne* (fig. 185). — Les dents de la roue B sont des cylindres à bases circulaires, ayant leurs centres sur la circonférence primitive; les profils enveloppes des dents de l'autre roue doivent être, comme on l'a vu, les courbes qu'on obtient en retranchant le rayon des cercles des bases de toutes les normales aux épicycloïdes engendrées par leurs centres lors du roulement du cercle primitif B sur le cercle A. Chacune des entailles est terminée soit par deux faces planes, soit par un arc de cercle dont le centre est sur la circonférence primitive, et le rayon au moins égal à celui des cercles de base des cylindres qui forment les dents d'une des roues. La poussée ne commence pour chaque dent que sur la ligne des centres, ou au moins extrêmement près de cette ligne (art. 163), par suite la roue, *le rouet*, ne peut être mené qu'avant la ligne des centres, ce qui est très-défectueux.

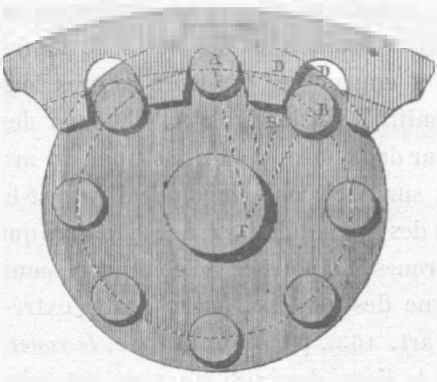
Cet engrenage porte le nom d'engrenage à lanterne, à cause de l'apparence que présentent les petits cylindres ou fuseaux ajustés entre deux plateaux ou tourteaux circulaires (fig. 186). Les dents de la roue pleine s'engagent entre les tourteaux; elles sont ordinairement implantées dans le corps de la roue, et s'appellent *alluchons*. Les fuseaux, s'usant plus vite que les alluchons par le frottement, s'exécutent plutôt en fonte, les dents plutôt en bois. On a aussi proposé de rendre les fuseaux mobiles autour de leur axe pour diminuer les frottements, mais cet ajustement manque de solidité et les fuseaux cessent bientôt de tourner.

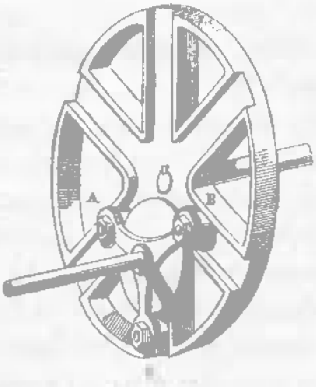
L'engrenage à lanterne est peu employé aujourd'hui, surtout par le motif indiqué plus haut, et seulement pour des mouvements qui n'exigent pas une grande précision.

204. *Engrenage à lanterne* (*intérieur*). — Il n'est pas sans intérêt d'examiner le tracé de l'engrenage à lanterne, quand les axes doivent tourner dans le même sens, que l'engrenage doit être intérieur.

Ayant tracé les circonférences primitives, on marque sur celle

intérieuretles petits cercles qui correspondent à la positiondes fuseaux, puis déterminant les arcs d'épicycloïde intérieurs engendrés par latseconde circonférence primitive roulant dans la première, et enfinlestdiminuant du rayondes fuseaux portéssur les normales, on obtient la courbe enveloppe de ceux-ci





Cescourbes se réduisent à des droites sile rayon de la grande circonférencetestdouble de celui de la petite.Cette propriétépermetde disposerd'une manière assezcurieuse les organes de cet engrenage, disposition vue pour la première fois à l'exposition de 1855, pour mener deux axes dans le rapport de vitesse de 1 à 2. Nous la représentons dans la figure 188. Les six flancs triangulairesadaptés à une desrouessontformésdelignes droites, et l'autretroue ne porte que troisdents, troisgalets, dontdeux sont toujours en prise. Rien n'empêcheraitd'imiterune semblable disposition pour un autre nombre de dents plusgrand quetrois, cequi conduiraità une solution moins simple.

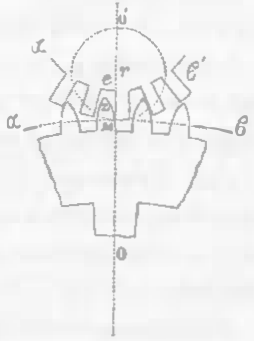


Fig. 189.

205. *Engrenagesà flancs* (fig. 189).— L'engrenage àflancs a plusdetdouceur et de régularitétque celui à lanterne. Danscelui-ci,les enveloppées, les profils que l'on se donnetsontdes rayons de l'unedes circonférences primitives, de $\alpha'\mathcal{C}'$ parexemple;les profilsenveloppes,

dont l'autre roue doit être armée pour conduire ces rayons, sont des épicycloïdes M*z* engendrées par le roulement sur la circonférence $\alpha 6$ d'un cercle V dont le diamètre O′M est le rayon de $\alpha' 6'$. Les plans diamétraux M*e* portent le nom de *flancs:* ils se terminent à la circonférence primitive dans laquelle ils sont entaillés, car l'épicycloïde qui les mène les rencontre en M au contact des circonférences et sur la ligne des centres par son point de rebroussement. On voit en même temps qu'elle ne peut jamais les conduire avant cette ligne. Quant aux limites intérieures de l'entaille comprise entre deux flancs, les règles générales s'appliquent sans difficulté. Ce sont ici les flancs eux-mêmes que l'on prolonge pour donner passage à la dent engagée; mais la partie de ces flancs, qui peut seule se trouver en prise, devra dans un engrenage délicat être la plus exactement dressée; la limite intérieure de cette partie se trouvera sur un cercle concentrique à O′ et dont le rayon est déterminé par le point d'intersection de la circonférence décrivante, avec la circonférence qui contient tous les sommets *z* des dents épicycloïdales.

206. *Engrenages à flancs réciproques.* — A proprement parler, dans un simple engrenage à flancs, semblable à celui que nous venons de décrire, l'une des roues n'offre aucune saillie au-dehors de sa circonférence primitive; l'autre roue, à la limite du moins, aucun vide intérieur au contour de la sienne. Telle n'est pas là la disposition employée dans la pratique; le plus souvent les deux roues sont garnies à la fois de saillies et d'entailles, ce qui donne le système déjà représenté fig. 183. Les épicycloïdes M*z* sont prolongées au delà de leur origine M par des flancs formant ainsi avec elles un profil continu, et réciproquement les flancs *e*M se raccordent avec des épicycloïdes, enveloppes des rayons de la circonférence $\alpha 6$. Deux roues semblables peuvent indifféremment se mener l'une l'autre.

La plus petite des deux roues s'appelle *pignon;* ses dents sont souvent appelées des *ailes.*

207. *Engrenages intérieurs, à flancs à la roue intérieure.* —

L'engrenage à flancs est quelquefois intérieur. C'est le nom qu'on lui donne lorsqu'un des centres O′, par exemple, et la circonférence $\alpha' 6'$ sont intérieurs à la circonférence $\alpha 6$. Si la roue extérieure doit seule être armée de dents et la roue intérieure porter seule des flancs, comme figure 190, cet engrenage ne donne lieu à aucune remarque nouvelle. Les profils de la roue extérieure sont des épicycloïdes engendrées par un cercle mobile dont le rayon est moitié du rayon du cercle O′, et qui roule intérieurement sur $\alpha 6$. Les dents doivent conduire; elles ne peuvent le faire qu'après la ligne des centres.

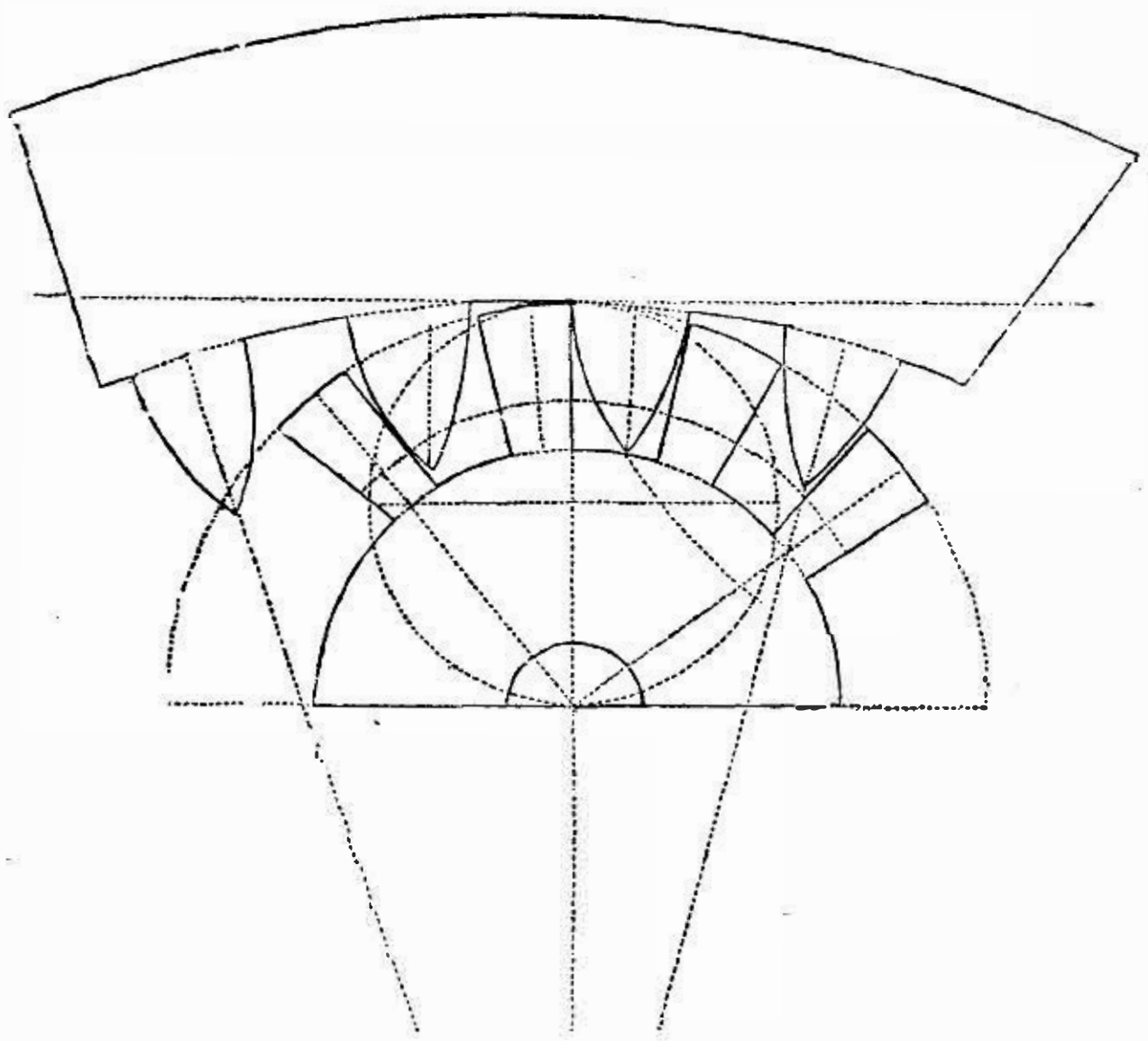


Fig. 190.

208. *Engrenages à flancs à la roue extérieure.* — Mais si au contraire, dans le même genre d'engrenage, on voulait faire conduire la roue extérieure par la roue intérieure, il faudrait armer de dents M t la roue intérieure O′ (fig. 191), et donner seulement des flancs à la roue extérieure $\alpha 6$, les profils M t seraient les épicycloïdes engendrées par le roulement sur $\alpha' 6'$ d'un cercle mobile dont le rayon serait moitié du rayon de $\alpha 6$; mais alors les flancs

M *ie* de α 6 devraient être entaillés d'une part jusqu'en *i*, pour donner passage aux dents; de l'autre, et c'est ici le point important, comme il faut que la poussée n'ait pas lieu au seul point de contact des circonférences primitives, on doit les prolonger en saillie intérieure par rapport à la circonférence primitive α6, depuis M jusqu'en *e*, ce prolongement M*ie* pouvant seul recevoir les contacts des profils M *t*.

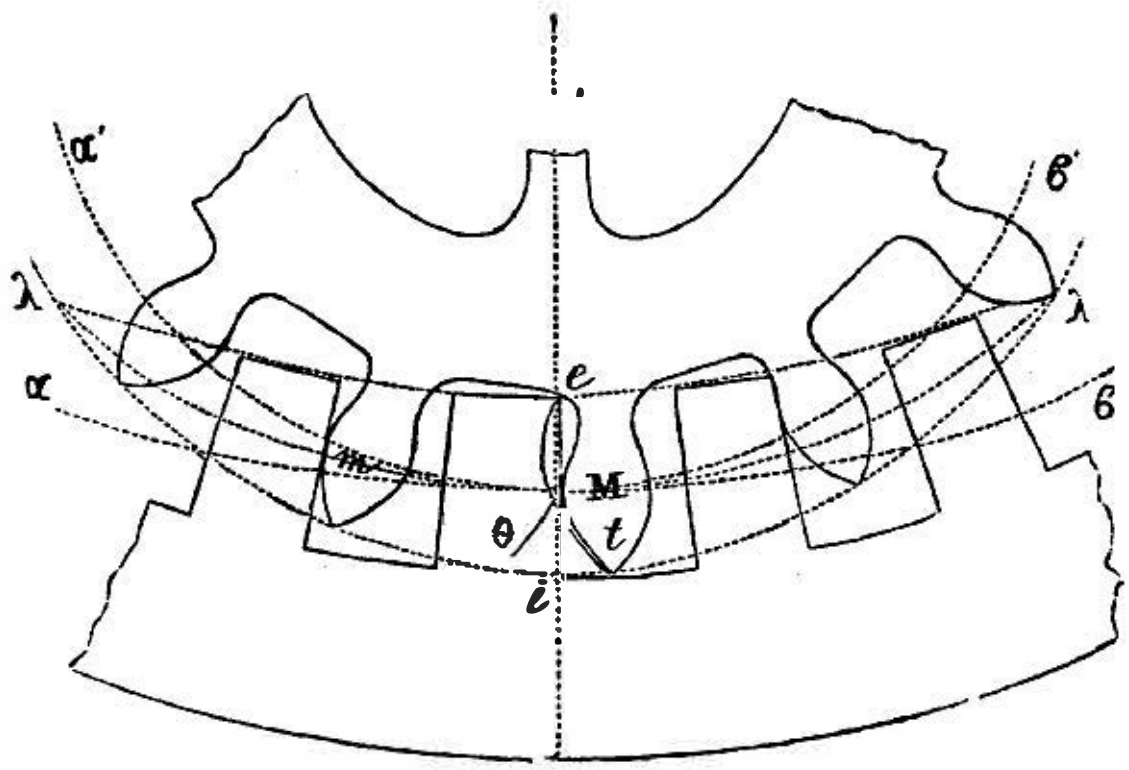


Fig. 191.

En effeti, pour trouver le point des flancs *i* M *e*, où le sommet des dents viendra les toucher, on décrira, comme en général, de O' comme centre, la portion de la circonférence $\lambda\, t\, \lambda$ passant par les sommets *t*, jusqu'à sa rencontre en $\lambda\,\lambda$, avec la circonférence ayant un diamètre égal au rayon de α 6. Comme une semblable circonférence également tangente en M à α' 6' décrit les profils M *t*, les divers points de M *t* la rencontreront dans des positions qui correspondront à celles qu'occupe le point M sur la circonférence décrivante pour un même roulement. La première décrit d'ailleurs les flancs *i* M *e*, elle renfermera donc tous les points de contact des dents avec les flancs; la circonférence $\lambda\, e\, \lambda$ concentrique avec α 6 contiendra donc les limites cherchées des flancs, des contacts extrêmes des sommets *t*. La longueur des dents, et par suite celle *i e* des flancs, sera d'autant plus grande que l'on voudra qu'un plus grand nombre de dents soient en contact.

Il ne suffit pas ici d'avoir déterminé l'étendue convenable des flancs M *e* formant saillie, il faut encore s'assurer que ces flancs, dans toutes les dispositions relatives où le jeu de l'engrenage les amènera, pourront se loger sans obstacle entre les dents M *t* de O′. Cela revient à dire, en considérant les flancs M *e* comme de véritables dents, que l'entaille dans la roue entre ses dents M *t* devra avoir pour limite l'enveloppe de toutes les positions du pointe dans le roulement de la circonférence primitive $\alpha\,6$ elle-même sur l'autre circonférence primitive $\alpha'\,6'$. Cette enveloppe est l'épicycloïde allongée $\theta\,e\,t$ qui se raccorde nécessairement en *t* avec le profil épicycloïdal de la dent M *t*, puisque ces deux points viennent en contact par le roulement. Cette dent M *t* devrait donc à l'intérieur être évidée suivant la courbe $e\,\theta$ (art. 163). Au point voisin de M où les deux courbes se coupent, l'arête devrait être adoucie. Une portion vers M du profil M *t* se trouvant ainsi supprimée, la dent M *t* ne pourrait agir qu'un peu après la ligne des centres. Mais, ce qui est encore plus important, cette dent peut se trouver tellement affaiblie à la partie inférieure vers *e*, que la disposition et l'engrenage dont on vient de parler doivent être, en général, exclus de la pratique.

209. *Impossibilité de rendre cet engrenage réciproque.* — Quant à donner à la fois à chaque roue, comme dans l'engrenage extérieur, des dents épicycloïdales et des flancs, on en reconnaît ici l'impossibilité. En effet, en considérant la dernière figure, on voit que le flanc M *e* de la roue O′ devrait être creusé pour faire place à l'épicycloïde raccourcie $\theta\,e$, ou que le flanc *i e* de la roue O, si l'on voulait que O portât un flanc, devrait disparaître pour laisser à découvert le profil $\theta\,e$, et ne pourrait par suite avoir la forme d'une dent. Ce n'est qu'en multipliant le nombre des dents et diminuant leur saillie au delà des circonférences primitives, en augmentant le jeu, qu'on exécute des engrenages intérieurs par les mêmes principes que les engrenages extérieurs, sans inconvénient dans la pratique.

210. *Engrenages épicycloïdaux.* — Les dents tracées dans le système que nous venons d'expliquer sont celles que la pratique

a jusqu'ici généralement adoptées; leur emploi offre cependant un inconvénient très-grave : le cercle décrivant de l'arc épicycloïdal des dents devant avoir pour diamètre le rayon du cercle primitif de la roue avec laquelle ces dents engrènent, il en résulte qu'une roue d'un pas et d'un nombre de dents donnés, 40 par exemple, tracée pour marcher convenablement avec une autre roue de 50 dents, engrènera fort mal avec une autre roue d'un tout autre nombre de dents, tel que 100. Il est évident, en effet, que le diamètre du cercle décrivant étant 1 dans le premier cas, devrait être double dans le second, et engendrer par suite des arcs épicycloïdaux différents des premiers. Cette objection intéresse au plus haut degré la pratique moderne qui fait un emploi constant d'engrenages métalliques fabriqués à l'avance. Elle oblige, en effet, le fondeur à exécuter pour un pas donné autant de modèles différents qu'il veut faire engrener de roues différentes avec une seule et même roue; ce qui exige un nombre presque indéfini de modèles.

En outre, dans une foule de combinaisons mécaniques, il arrive qu'une roue principale doit conduire à la fois et directement deux, trois, quatre roues de différents diamètres.

C'est donc un grand progrès que d'adopter un tracé des dents tel, que deux roues quelconques d'un pas déterminé engrènent convenablement.

Pour satisfaire à cette condition, il suffit de choisir, pour tout un système de roues de même pas, un *cercle décrivant* convenable mais *constant*, de le faire rouler extérieurement sur chacune des circonférences primitives pour décrire les parties des dents extérieures à ces circonférences, puis de le faire rouler intérieurement à chacune d'elles pour lui faire décrire les épicycloïdes internes qui forment les dents intérieures à ces circonférences primitives.

La fig. 192 montre l'application de ce principe.

A et B sont les centres de rotation, T *d* D = T *g* G est le cercle décrivant constant, qui en roulant, savoir : extérieurement sur F *f* trace les flancs *r q*; intérieurement à F *f* les flancs *r s*; de même relativement à E *e*, les faces *m n*, les flancs *m p*.

Ainsi qu'on l'a vui, les courbes décrites par le roulement d'un même cercle sur les deux circonférences, extérieurement sur l'une, intérieurement sur l'autre, seront enveloppes et enveloppées; le contact aura donc toujours lieu sur cette circonférence dont un même point engendre les deux courbes. Une partie du cercle générateur G *g* Tisera le lieu de contact avant la ligne des

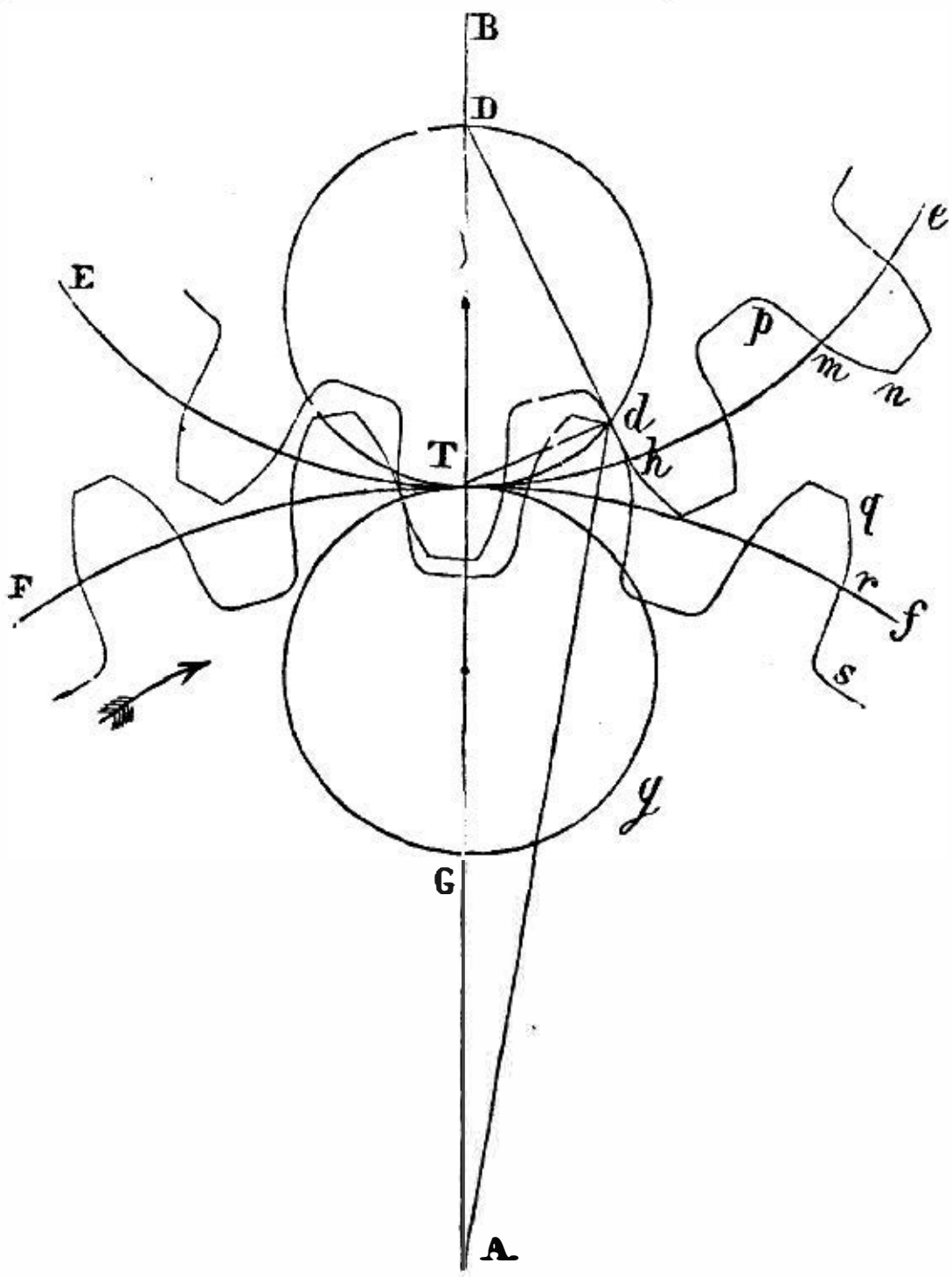


Fig. 192.

centres, une partie du cercle égal T *d* D sera le lieu de contact après le passage de cette ligne. Ce contact s'éloignera de plus en plus du centre de rotation de la roue qui mène, en se rapprochant du centre de la roue conduite. Il commencera avant la ligne des centres entre la pointe *n* de la roue conduite et la racine *s* de la dent qui la conduit, remontera de *n* vers *m* sur la

première et descendra de *s* vers *r* sur la seconde, jusqu'au passage de la ligne des centres sur laquelle le contact aura lieu entre les points *r* et *m*. Il s'avancera après le passage de cette ligne de *r* vers *q* et de *m* vers *p* pour cesser à la *pointe* de la dent qui mène, et à la racine de la dent menée, de telle sorte que le contact a lieu avant la ligne des centres au dedans de la circonférence primitive de la roue qui mène, et au dedans de la circonférence primitive de la roue menée, après le passage de cette ligne. Les dents étant symétriques, chacune des roues peut d'ailleurs indifféremment conduire ou être conduite.

Diamètre du cercle décrivant. — En aucun cas le diamètre du cercle décrivant ne doit être *plus grand* que le rayon primitif de l'une quelconque des roues du système. S'il en était autrement, les dents auraient à la racine une épaisseur beaucoup moindre que sur la circonférence primitive, défaut évident que partagent, quoique à un degré moindre, les engrenages à flancs. Lorsque, au contraire, le diamètre du cercle décrivant est plus petit que le rayon du cercle primitif, les dents s'épanouissent vers la base et acquièrent ainsi une forme qui favorise leur résistance à la rupture; il ne faudrait pas toutefois réduire ce diamètre à l'excès; car alors les faces épicycloïdales prenant trop de courbure, les dents deviendraient trop courtes; il semble que la meilleure règle à suivre consiste à prendre pour diamètre du cercle décrivant le rayon de la plus petite de toutes les roues du système.

211. *Engrenages à développantes à cercle.* — Si par le point de contact T des circonférences primitives (fig. 193) on mène une droite DTE, les cercles intérieurs AD, BE tangents à cette droite, concentriques aux circonférences primitives, auront des rayons proportionnels aux rayons des deux circonférences. Les développantes HK du cercle AD et FG du cercle BE seront l'une à l'autre enveloppe et enveloppée, comme nous l'avons vu. Elles pourront donc former les profils conjugués de deux dents d'un système d'engrenages.

Les contacts se trouvent constamment sur la droite DE; la deuxième tangente menée aux deux cercles par le point T serait

de même le lieu des contacts des autres faces symétriques avec les premières faces des dents.

Les dents terminées de part et d'autre par des développantes symétriques pourront être échanfrinées ; leur longueur totale sera obtenue en les traçant dans la position extrême où elles doivent agir avant et après la ligne des centres, et en les coupant à cette distance par des arcs de cercle concentriques aux roues. La saillie

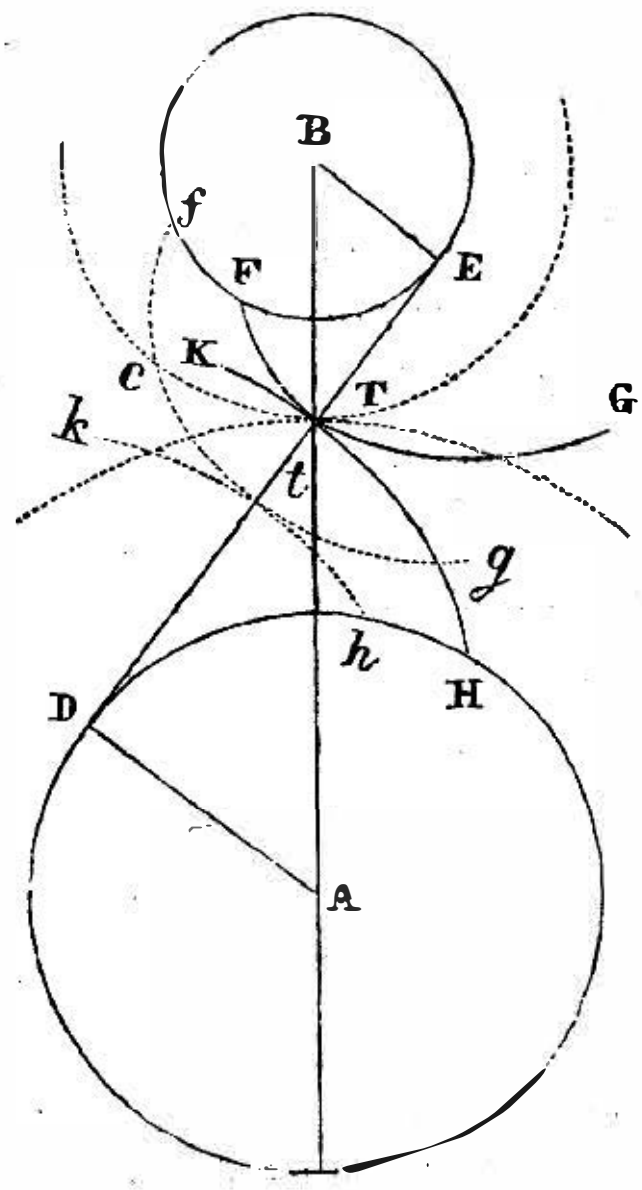


Fig. 193.

des dents étant déterminée, pour leur donner passage, on prolonge, si cela est nécessaire, les développantes à partir de leur origine, par deux rayons dirigés vers les centres, et on termine le fond de chaque entaille par un arc de cercle.

212. *Engrenages intérieurs à développantes* (fig. 194). — L'engrenage à développantes peut être intérieur, l'une des circonférences se trouver comprise dans l'autre. Les dents de la roue intérieure doivent être tracées comme celles que porterait d'après la construction précédente une circonférence extérieure, à l'aide d'une droite passant par le point de contact ; le profil des

dents de la circonférence extérieure serait tracé de même, par suite leur courbure serait de même sens. C'est ce qui se reconnaît encore, d'après la construction générale des enveloppes, par la direction des rayons de courbure des développantes M z et M e : et ces courbes, comme les circonférences primitives, ont leur courbure tournée dans le même sens; inconvénient très-grave dans la pratique; aussi ces engrenages intérieurs n'ont guère d'applications. Celui-ci, comme on le voit, est réciproque. Quelle que soit la roue menante, il peut, si le nombre des divisions est suffisant, avoir constamment deux dents en prise après la ligne des centres.

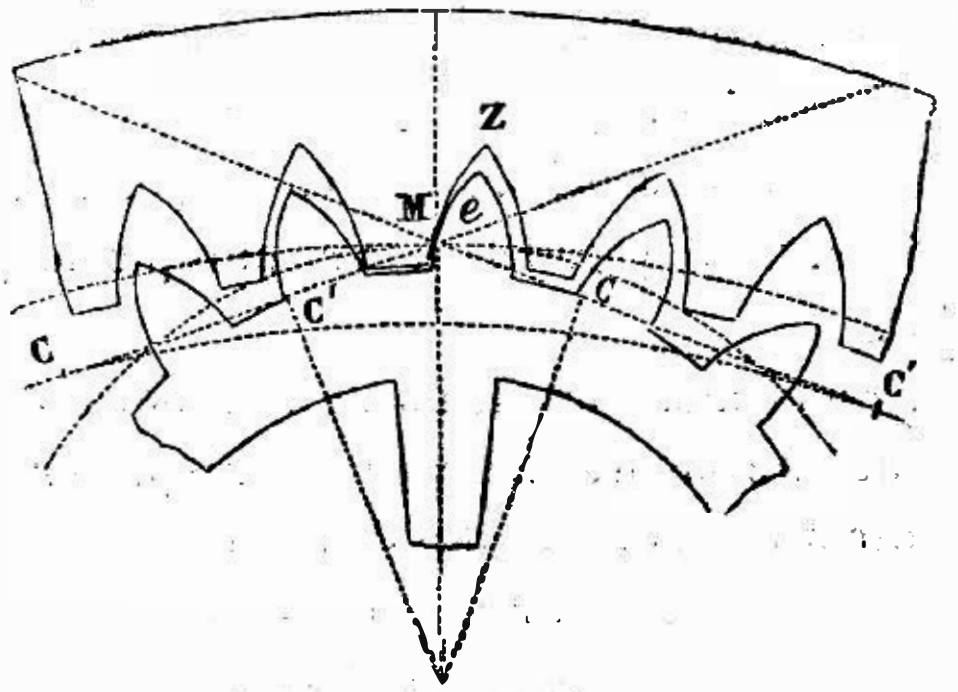


Fig. 194.

Remarquons que les engrenages à développantes ont, relativement aux engrenages épicycloïdaux, l'inconvénient de se conduire par des contacts plus obliques relativement à la ligne des centres; ils jouissent toutefois de quelques avantages spéciaux sur lesquels nous reviendrons.

TRACÉ PRATIQUE DES DENTS.

La portion de courbe qui forme le contour d'une dent a toujours un développement assez faible pour qu'on puisse lui substituer un ou deux arcs de cercle au plus, sans erreur sensible; c'est ce qui a toujours lieu dans la pratique. Toute la

difficulté consiste à déterminer les centres et les rayons de ces arcs.

Nous ne parlerons pas du procédé employé quelquefois, qui consiste à tracer une dent en plaçant le centre d'un compas à l'origine de la dent suivante. Ce n'est qu'un moyen grossier que les bons ateliers doivent abandonner pour adopter des procédés basés sur les résultats de la théorie.

213. *Traité de la dent par un seul arc de cercle.* — Si nous nous reportons à l'art. 160, nous y trouvons une méthode pour le tracé qui nous occupe. Menons par le point de contact T (fig. 142) une droite PTQ de direction qui peut être quelconque, mais qu'il est mieux de faire telle que $PTA = 75°$ pour avoir des dents de forme convenable. Abaissons Ar perpendiculairement à cette ligne et prenons le point r pour le centre des dents d'une des rouesi, le centre de courbure de l'enveloppe sera le point S obtenu en menant BS parallèle à Ar, puisque le point K est alors à l'infini.

Pour tracer rapidement les dents de la roue, il convient, du centre A, de décrire la circonférence du rayon Ar, qui devient le lieu des centres de courbure des dents de la roue; puis d'une ouverture de compas égale à rT, et en prenant pour centres les divisions tracées sur le cercle primitif en raison du nombre de dents, on trace les contours de celle-ci.

Les dents ainsi tracées se rapprochent beaucoup des dents en développantes, il suffirait que le centre r se déplaçât quelque peu pendant le tracé des dents pour qu'elles eussenti cette forme. Elles participent des avantages et des inconvénients de ce genre de dentsi; toutefoisi, comme elles sont tracées à l'aide d'un seul arc de cercle, il n'y a qu'une position pour laquelle le rapport des vitesses angulaires reste rigoureusement constant, c'est celle qui répond à la position du point de contact sur la ligne des centres.

214.i *Tracés des dents par deux arcs de cercle.* — On obtiendra un degré d'exactitude bien plus grand, et qui satisfera amplement à tous les besoins de la pratique, en traçant le flanc etila

face de chaque dent, chacun par un arc de cercle, ayant chacun une tangente commune avec la courbe rigoureuse, avec la condition que le point d'action exact de l'un soit situé un peu en deçà de la ligne des centres, et celui de l'autre un peu au delà

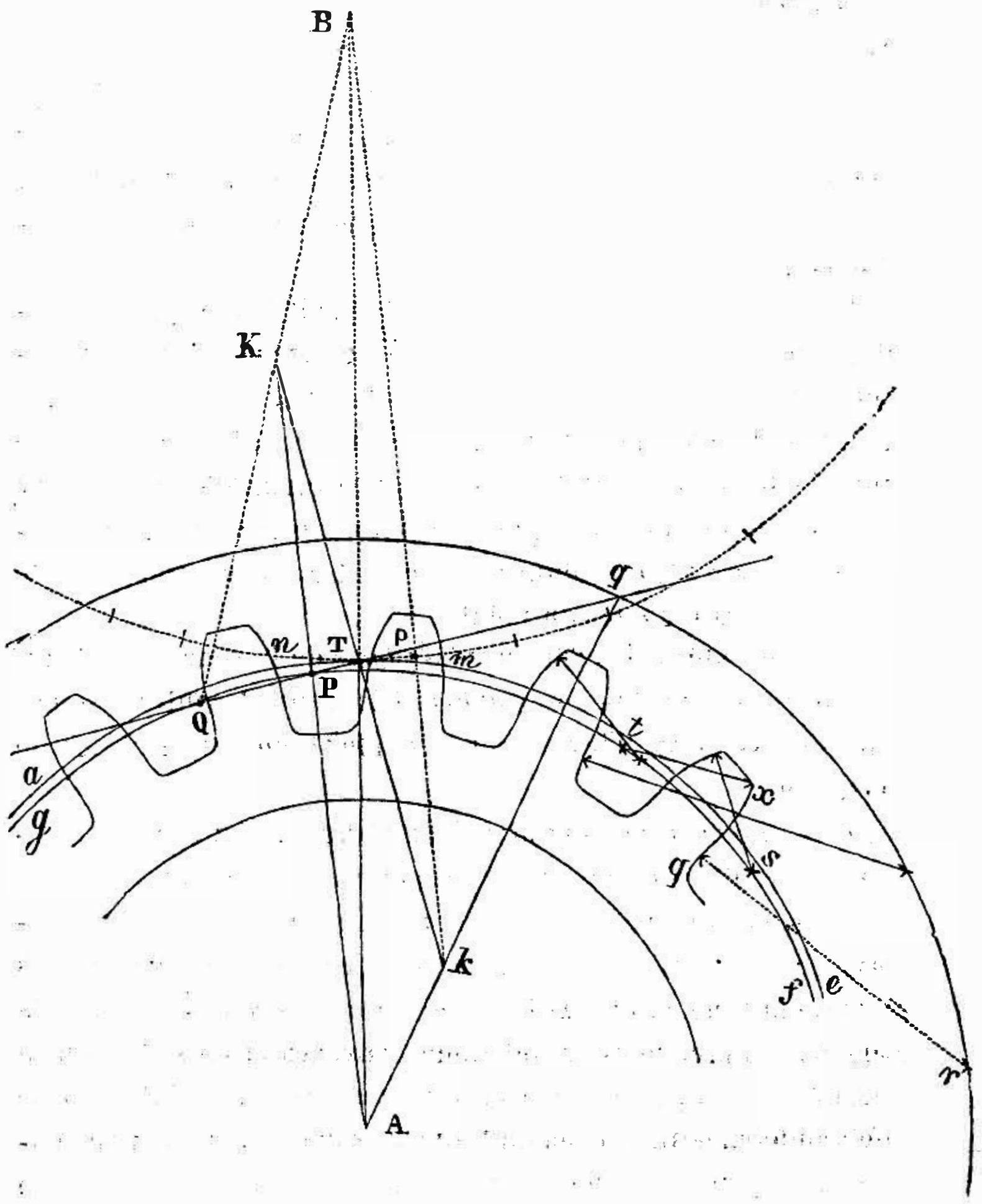


Fig. 195.

de cette ligne et à la même distance, égale à la moitié du pas, par exemple.

La fig. 160 montre l'application de cette méthode, qui a été introduite par M. Willis dans les ateliers anglais, et qui repose sur les beaux théorèmes ajoutés par ce savant à la théorie des engrenages.

A est le centre de rotation de la première roue, B celui de la seconde roue avec laquelle la première engrène.

T est le point de contact de leurs circonférences primitives; par ce point T menez une droite QTq, faisant, avec la ligne des centres, un angle PTA = BTq qui peut être quelconque; celui de 75° est très-bon pour que les dents aient une forme convenable.

Menez à cette droite QTq et par le point T une perpendiculaire indéfinie, et marquez sur cette perpendiculaire deux distances égales TK, Tk qui peuvent être quelconques, mais plus petites toutefois que le plus petit rayon primitif du système de roues dentées. Par l'extrémité K de cette perpendiculaire et par le centre B menez BK, que vous prolongerez jusqu'à sa rencontre Q avec QTq. Joignez K au centre de la roue A, cette droite coupera QTq en un point P.

P est le centre des courbures des *faces* de la roue A, et Q est le centre de courbure des *flancs* de la roue B contre lesquels agissent ces faces. C'est encore l'application des principes de l'art. 160.

215. — *Pour avoir les rayons de courbure*, prenez sur la circonférence primitive de la roue A un point m, situé à une distance de T égale à la moitié du pas, de l'autre côté de la ligne des centres par rapport à P et à Q. Pm sera le rayon de courbure des faces de la roue A, et Qm le rayon de courbure des flancs de la roue B; les premières seront donc convexes et en saillie sur la circonférence A, les secondes seront concaves et à l'intérieur de la circonférence B. En opérant sur la roue B, comme nous l'avons fait pour la roue A, en traçant les lignes Ak et Bk, on aura les centres p et q, et les rayons de courbure pn et qn des flancs de la roue A et des faces de la roue B.

216. — Pour achever le tracé de l'engrenage, on décrira du

centre A et du rayon Aq une circonférence qui sera le lieu des centres de courbure des flancs de la roue A, dont les rayons de courbure $= qm$. Une autre circonférence de rayon A P contiendra les centres de courbure de ses faces, dont les rayons $=$ Pm.

Il importe de remarquer que les dents de la roue A, par exemple, ne changeraient pas de forme, quand bien même la roue B, avec laquelleeelle engrène, aurait un rayon différent de BT, pourvu toutefois que les distances K T $=$ Tk $=$ C demeurassent constantes. Quelle que puisse être, en effet, la position de B sur la ligne des centres, cette position n'affecterait que la position des centres de courbure Q et p des dents de cette même roue B T, sans rien changer à la situation des centres de courbure P et q de la roue AT.

Il en résulte que quel que soit le nombre de roues d'un système pour lequel les lignes Qq et Kk conserveront les mêmes positions angulaires, par rapport à la ligne des centres, et les droites K T $=$ Tk la même valeur absolue C, deux quelconques de ces roues marcheront ensemble convenablement.

On peut d'ailleurs déterminer la distance K T dans un tel système en remarquant que si A se rapproche de T, Aq qui tend d'abord à devenir parallèle à Tq, dépasse ensuite cette position; le point q, dans le cas du parallélisme, est rejeté à l'infini et le flanc de la roue A devient une ligne droite perpendiculaire à P Tq. Lorsque la position de A qui rend Tq parallèle à P'Tq est dépassée, le centre de courbure q, des flancs de A, se trouve situé de l'autre côté de T, et ces flancs deviennent alors convexes, ce qui donne aux dents une forme bizarre, inadmissible à cause des arcs-boutements.

Il est donc rationnel de donner à KT, pour valeur maximum, celle qui combinée avec le plus petit rayon du système rendrait Aq parallèle à Tq. r étant alors le rayon de la plus petite roue d'un système d'engrenages, on a : K T $= r$ sin. Q TA ou C $= r$ sin. θ, en appelant θ l'angle de la droite P Tq et de la ligne des centres.

Si l'on veut calculer pour une autre roue quelconque la dis-

tanee d du point de contingence T au centre P de courbure des faces, et celle D au même point T du centre de courbure q des flancs, on les aura facilement en fonction des quantités connues. En effet, dans la fig. 195, menant AR perpendiculaire à PTq, on a :

$$AR : PR = KT : PT.$$

Remplaçant ces quantités par leurs valeurs et posant :

$$PR = TR - PT, \text{ on a :}$$

$$d = PT\ \frac{KT \times PR}{AR} = \frac{r \sin.\theta \times (R \cos.\theta - d)}{R \sin.\theta}$$

$$= \frac{Rr \cos.\theta - rd}{R},$$

$$\text{d'où } (R + r)\, d = Rr \cos.\theta \text{ et } d = \frac{Rr \cos.\theta}{R + r}.$$

En opérant de même pour l'autre cercle, on trouverait :

$$D = \frac{Rr \cos.\theta}{R - r} = qT.$$

Donnant à r et à θ les valeurs constantes qu'on juge les plus convenables pour ce système général d'engrenages, on calcule et l'on dispose facilement en tables numériques les valeurs de D et d correspondantes à différents rayons et à différents pas, et on se trouve ainsi dispensé de faire un tracé complet pour chaque cas, ce qui rend cette méthode très-avantageuse dans la pratique.

Si, par exemple, on prenait $r = 1^m$ pour le plus petit pignon d'un système de gros engrenages et $\theta = 75° 30'$, on aurait sensiblement

$$d = \frac{R}{4\,(R+1)} \text{ et } D = \frac{R}{4\,(R-1)}.$$

217. *Odontographe.* — M. Willis a fait établir, pour l'usage de sa méthode, une espèce de petit rapporteur en corne ou carton (fig. 196), sur lequel on trace des divisions assez fines, et dont une face est inclinée suivant QTq. Ce petit appareil, qu'il appelle *odontographe*, donne rapidement les centres des

courbes des dents dont les rayons sont fournis par une table préalablement dressée.

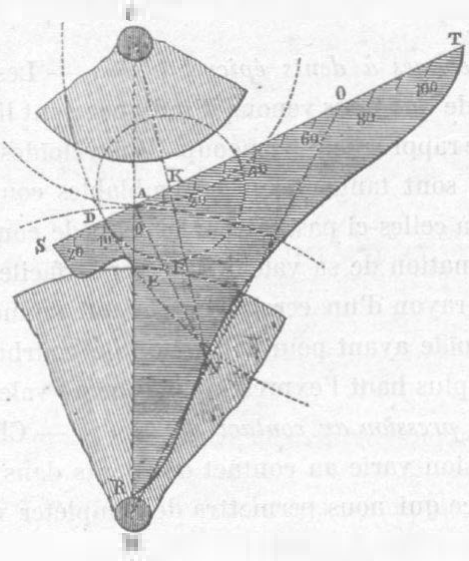


Fig. 194.

218. *Application aux engrenages à lanterne.* — Les fuseaux de la lanterne étant des dents en arc de cercle, si on suppose le point K situé à l'infini (fig. 142), AP, BQ deviendront perpendiculaires à PTQ et les centres de courbures cront situés en *r* et en *s*. Le premier sera celui de la dent et le second le centre du fuseau. Prenant donc entre T et S un point *m* situé à une distance de S égale au rayon du fuseau, *rm* sera le rayon de courbure de la dent.

219. *Engrenages à flancs.* — Si on voulait que le flanc de la roue fût une droite dirigée suivant le rayon, cette condition rejetterait évidemment à l'infini le centre de courbure de ce flanc, et le point *k* s'obtiendrait en menant du point A une perpendiculaire à la direction KT*k* (fig. 195). On joindrait ensuite les points *k* et B par une droite qui couperait PTQ en un point qui serait de centre de courbure de la dent destinée à conduire de flanc droit. La perpendiculaire AR abaissée sur PTQ serait elle-même la direction de ce flanc, et ce serait par le point R que devrait

passer l'arc de la dent qui mène. L'angle RTA devrait en même temps prendre la valeur qui rendrait TR = demi-pas, puisque R est par hypothèse un point par lequel la poussée se produit nécessairement.

220. *Engrenages à dents épicycloïdales.* — Les dents tracées par la méthode que nous venons d'indiquer sont limitées par des courbes qui se rapprochent beaucoup d'épicycloïdes, et sur la ligne de QTq elles sont tangentes à de semblables courbes. En effet, les normales à celles-ci passent par le point de contingence T, et de la détermination de sa valeur D il serait facile de déduire la valeur R′ du rayon d'un cercle roulant qui donnerait naissance à une épicycloïde ayant pour son rayon de courbure, dont nous avons donné plus haut l'expression, la même valeur.

221. *De la pression au contact des dents.* — Cherchons comment la pression varie au contact des dents dans un engrenage quelconque, ce qui nous permettra de compléter nos études sur les engrenages à développantes.

Soit N la pression qui s'exerce au point de contact entre les deux dents ab, $a'b'$, suivant la normale commune, soit P la force qui agit à la circonférence de la roue O, on aura, le mouvement étant uniforme :

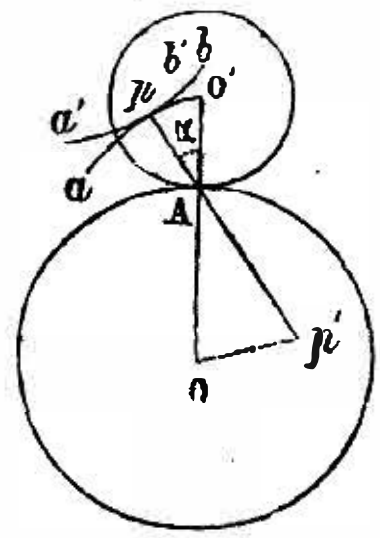


Fig. 197.

P R = N R sin. α, α étant l'angle de la normale et de la ligne des centres, et R sin. α = O p', la perpendiculaire abaissée sur la normale A p, suivant laquelle la pression a lieu, d'où :

P = N sin.α.

222. — Pour tous les engrenages, sauf pour celui à développantes, l'angle de la normale et de la ligne des centres étant variable, la pression est donc constamment variable. La valeur de la pression est au contraire constante dans les engrenages à développantes, ce qui est un avantage dont toutefois il ne faut pas s'exagérer l'importance, car il n'en résulte pas une usure régulière des dents. Pour cela, en effet, il faudrait que le travail

du frottement fût constant, et par suite aussi le chemin parcouru par le frottement; il faudrait donc que la différence des arcs passant dans un même temps au point de contact, ou que pour des longueurs de courbes égales, la différence des rayons de courbure fût constante; ce qui n'est pas. La variation en est d'autant moindre que le contact sur chaque dent, qui a toujours lieu suivant la tangente commune, est moins prolongé, ce qui a lieu en rendant le nombre des dents un maximum, comme nous le verrons bientôt. En réalité, le travail du frottement variant, il en résulte que l'usure n'est pas la même pour tous les points de la dent et est plus grande vers la racine que vers la pointe.

Dans les engrenages à développantes, la forme des dents de chaque roue, étant déterminée par le roulement d'une droite sur une même roue, ne change pas quand le rayon d'un des cercles varie, avantage que possède seul le dernier système que nous venons de décrire et que ne possèdent pas les engrenages à flancs, pour lesquels les formes d'une dent sont déterminées par le roulement d'une circonférence dont le rayon est moitié de celui de l'autre cercle primitif.

Enfin, un dernier avantage des engrenages à développantes et qu'ils possèdent seuls, est que si les axes des roues éprouvent un certain déplacement en restant parallèles, l'engrenage ne cesse pas d'être exact, la poussée devant toujours avoir lieu par les mêmes courbes dans tous les cas.

Pour le tracé de ces engrenages, on doit incliner très-peu la tangente commune aux deux roues concentriques aux circonférences primitives, les bras de levier de la puissance et de la résistance seront les plus grands possible, ce qui est avantageux, puisque, pour la transmission d'une même quantité de travail, la pression diminuant, son action destructive sur chaque dent diminuera également.

Tous les éléments du tracé d'un engrenage quelconque sont actuellement déterminés, sauf un, celui du nombre de dents, ou plutôt les limites dans lesquelles les nombres $\frac{n}{n'} = \frac{R}{R'}$

doivent se trouver renfermés pour que l'engrenage satisfasse aux conditions de continuité d'action que nous avons reconnu être nécessaires.

DES ARCS-BOUTEMENTS. — NOMBRE ET SAILLIE DES DENTS.

223. — La résistance passive qui s'exerce entre les dents d'un engrenage, avant et après la ligne des centres, n'est pas également nuisible. Avant la ligne des centres, elle ne se borne pas au frottement, il peut en résulter une action destructive que les arêtes vives de la pointe des dents peuvent exercer sur les surfaces qu'elles rencontrent obliquement.

Il peut arriver, soit à raison du petit nombre de dents, soit à raison de quelque irrégularité dans leur exécution, qu'à une certaine époque du mouvement les deux roues O, O′ (fig. 198), n'aient qu'un seul point de contact en *m* précisément suivant le dernier élément du profil *m a*.

A partir de cette position, si la roue O tournant de droite à gauche est celle qui mène, la pointe *m* formant arête vive exercera seule la poussée en remontant vers l'extrémité *b* du profil *d b*, tandis que la poussée régulière devrait avoir lieu par le pro-

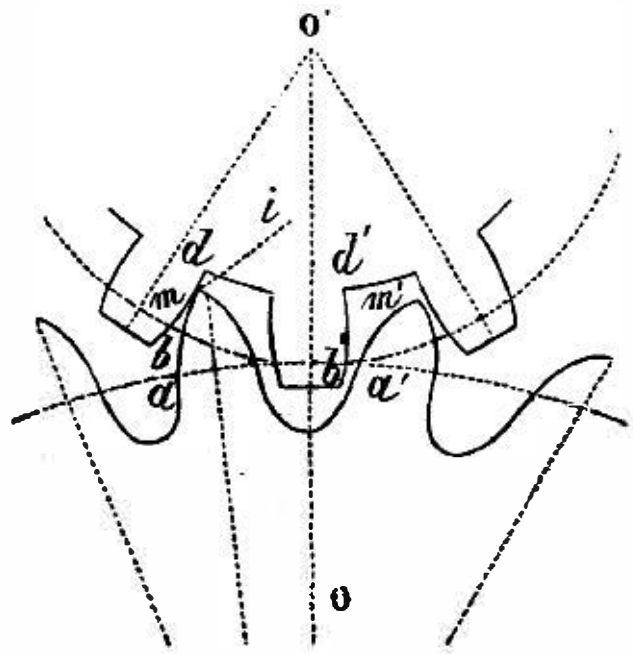


Fig. 198.

longement *m i* du profil *a m* et de manière que le contact s'avançât vers *d*, le long du profil *b d*. On voit d'abord que le mouvement de la roue O′ dans la poussée qui se fait par l'arête vive *m* se trouve ralenti. En effet, si la courbure des profils *a m i*, *b m d* a

constamment le même signe, toutes les tangentes à la portion mi, par exemple, laissent derrière elles, par rapport au sens du mouvement, la portion de profil $a\,m$, la pointe m par conséquent. Le mouvement de O′ est ainsi ralenti jusqu'à ce que la poussée se fasse régulièrement de la dent $a'\,m'$ sur la dent $b'\,d'$. Toutefois, et dans cet intervalle, la poussée irrégulière par la pointe m n'a lieu qu'au delà de la ligne des centres, qu'après cette ligne par rapport au sens du mouvement.

Mais renversons le sens du mouvement. Regardons la roue O′ comme roue menante et comme tournant de b vers b' dans le même intervalle de poussée irrégulière que nous venons de considérer, après que le profil $b'\,d'$ aura cessé d'être en prise, la partie $b\,m$ du profil $b\,d$ mènera seule la pointe m en la forçant d'avancer de b vers m. Alors, si l'on regarde comme uniforme le mouvement dirigeant de O′, la rotation de O se trouvera cette fois accélérée et de plus la poussée irrégulière de $b\,m$ sur le point m aura lieu tout entière avant la ligne des centres, par rapport au nouveau sens du mouvement. C'est alors que l'action de la pointe, ou, pour mieux dire, de l'arête vive m, peut surtout détruire la surface opposée, s'y enfoncer même au point d'arrêter le jeu de l'engrenage ou de briser les dents ainsi engagées; c'est là ce que l'on désigne par le nom d'arc-boutements. En effet, la somme des lignes $O\,m + O'\,m$ étant plus grande que $O\,O'$, s'il arrive que quelque obstacle s'oppose à leur mouvement, il y aura nécessairement rupture lorsqu'elles se rapprocheront de la ligne des centres; le même effet ne serait pas produit au delà de ligne des centres, la quantité $O\,m + O'\,m$ allant toujours en croissant.

224. *De l'effet des arcs-boutements.* — Il est facile de se rendre compte de la différence d'action des pointes des dents avant et après la ligne des centres. Si la pointe est en prise après cette ligne, elle parcourt la surface opposée de m vers b; si elle est en prise avant la même ligne (toujours par rapport au mouvement), elle parcourt la surface qui la pousse de b vers m.

Or, l'arête vive m (fig. 199) peut être considérée comme le

tranchant d'un ciseau symétrique par rapport au rayon de la roue O passant par le point *m*, et sur lequel on appuierait en cherchant en même temps à le faire glisser sur la surface *a m d*. Si le glissement doit avoir lieu du côté où le rayon fait avec les éléments de la surface un angle aigu, cette surface sera seulement usée d'une manière rapide; si le glissement tend à se produire du côté de l'angle obtus, il sera le plus souvent impossible, ou du moins il y aura sans cesse pénétration et déchirement. On voit clairement ce qui se passe en se représentant la surface *a b* comme composée de particules isolées, entre lesquelles tend à s'engager le tranchant de *m*. Dans un sens, ces molécules peuvent être considérées comme rencontrées par un plan incliné qui les surmonte; dans l'autre sens, poussées directement par un tranchant, elles devront être coupées.

Fig. 199.

225. *Des dispositions à prendre pour éviter les arcs-boutements.* — On les évitera sûrement en faisant en sorte que les dents ne puissent se rencontrer qu'après la ligne des centres; mais on voit alors que, si les dents ont des profils symétriques, il n'y aura qu'une des deux roues qui puisse être roue menante. C'est le cas de l'engrenage à lanterne, de l'engrenage à flancs où le pignon n'est point armé de dents, les fuseaux et les flancs ne devront jamais conduire la roue qui mène; celle-ci toutefois peut conduire dans un sens comme dans l'autre. J'appellerai les engrenages qui se trouvent dans ce cas *symétriques sans réciprocité*.

Mais dans les machines à mouvement rapide, à résistance très-inégale, où les vitesses sont régularisées par l'emploi de volants, il arrivera fréquemment que, tout en marchant généralement dans un seul et même sens, les roues seront alternativement, l'une par rapport à l'autre, menantes et menées. On voit d'abord qu'il importe de maintenir le jeu très-petit pour diminuer autant que possible les chocs au moment où les roues changent de rôle. Ensuite les dents des roues étant d'une longueur suffisante, les contacts ont lieu à la fois avant et après la ligne des centres.

J'appellerai *symétriques* et *réciproques* les engrenages de ce genre, dont les roues peuvent être indifféremment menantes ou menées.

Les engrenages à flancs, épicycloïdaux ou à développantes, formés de deux roues ayant des dents saillantes et symétriques, sont dans ce cas.

Longueur et saillie des dents.

226. Nous avons déjà vu comment on pouvait tracer graphiquement les limites des dents; mais il importerait de les calculer. Nous emprunterons à M. Willis d'intéressantes considérations sur la détermination des saillies des dents et l'influence de cette dimension sur les arcs d'*approche* (de contact en deçà de la ligne des centres) et de *retraite* (de contact au delà de la ligne des centres) dont nous venons de montrer l'importance.

Engrenage à flancs. Soient : $\varphi = TBd$ (fig. 200), l'arc de retraite qu'on veut obtenir; G, la saillie $f\,d$ de la dent de la roue de rayon $AT = R_1$, N_1 le nombre de dents dont elle est armée; G_2, R_2, N_2 les quantités correspondantes pour l'autre roue, a le pas de l'engrenage $= \frac{2\pi R_1}{N_1} = \frac{2\pi R_2}{N_2}$.

D'après le tracé de l'engrenage à flancs, T d étant perpendiculaire à B d, on a $T\,d = R_2 \sin. \varphi$. Le triangle d T A fournit la relation $(R_1 + G_1)^2 = R_1^2 + T\,d^2 - 2\,R_1\,T\,d \cos. A\,T\,d$. Divisant par R_1^2 et remarquant en outre que :

$\cos. AT\,d = -\cos. BT\,d = -\sin. \varphi$ et mettant pour Td sa valeur, il vient :

$$\frac{R_1 + G_1}{R_1} = \left(1 + \frac{R_2^2 + 2\,R_1\,R_2}{R_1^2} \sin.^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Développant ce binôme, remplaçant sin. φ par son développement en série $\varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \ldots$. négligeant les termes qui renferment des puissances élevées de φ à partir de la quatrième, ce qui est permis, puisque dans la pratique cet angle est toujours assez petit, il vient :

$$\frac{G_1}{R_1} = \frac{2 R_1 R_2 + R_2^2}{2 R_1^2} \varphi^2.$$

Appelant F le rapport de l'arc de retraite au pas,

$$F = \frac{T m}{a} = \frac{R_2 \varphi N_2}{2 \pi R_2} \text{ d'où } \varphi = \frac{2 \pi F}{N_2}.$$

Ce qui donne, pour obtenir la saillie G_1 des dents de la roue qui mène, en remplaçant R_1 R_2 par leurs valeurs en N_1 N_2, la relation

$$\frac{G_1}{a} = \pi F^2 \left(\frac{2}{N_2} + \frac{1}{N_1} \right).$$

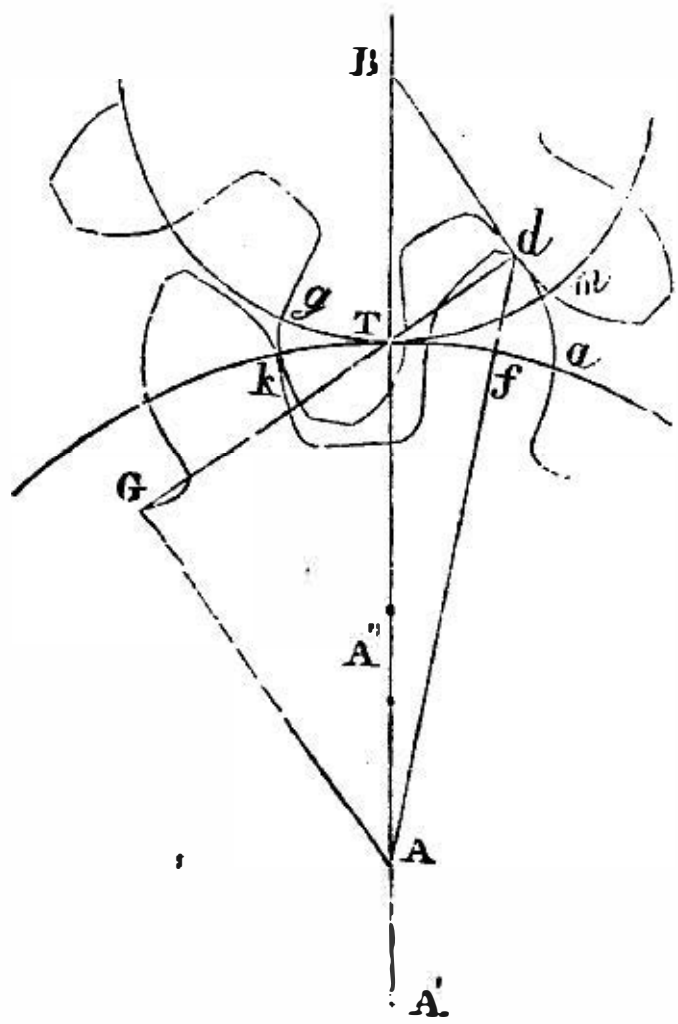


Fig.. 200.

La saillie G_2 des dents de la roue conduite s'obtiendrait d'une manière analogue en retournant la figure et considérant alors l'arc T*m* comme un *arc d'approche ; f* étant alors le rapport de l'arc d'approche au pas, on aurait, pour déterminer la saillie à la roue conduite

$$\frac{G_2}{a} = \pi f^2 \left(\frac{2}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right)$$

et enfin :

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{F^2}{f^2} \left(\frac{2 N_1 + N_2}{2 N_2 + N_1} \right).$$

La longueur totale λ des dents mesurée suivant le rayon des roues, à partir du fond du creux, devra en pratique prendre la valeur (en y comprenant le jeu nécessaire) :

$$\lambda = G_1 + G_2 + \frac{a}{10}.$$

227. *Observations.* — On remarque : 1° que la somme des arcs d'approche et de retraite doit être moins égale au pas, pour qu'une dent vienne en prise lorsque la précédente va échapper, ce qui suppose $F + f = 1$ au moins ;

2° Que l'arc d'approche augmente avec la saillie de la roue menée, et que l'arc de retraite augmente avec la saillie de la roue qui mène ;

3° Que le coefficient, inconnu jusqu'ici, du frottement qui a lieu pendant *l'approche* étant sans aucun doute plus grand que celui qui a lieu pendant *la retraite*, on pourrait croire qu'il y aurait avantage à rendre nul l'arc d'approche, ce qui reviendrait à rendre nulle la saillie de la roue conduite ;

4° Qu'il faudrait alors, toutes choses égales d'ailleurs, augmenter l'arc de retraite de toute la valeur de l'arc d'approche, ce qui porterait le lieu du contact à une plus grande distance de la ligne des centres, et ferait croître ainsi rapidement le travail du frottement de retraite ; il pourrait arriver qu'on perdît plus d'un côté qu'on n'eût gagné de l'autre ;

5° On pense que, à défaut de données expérimentales suffisantes et dans l'ignorance complète où l'on est de la valeur relative des frottements d'*approche* et de *retraite*, il conviendra de diminuer l'arc d'approche (sans le rendre nul) et d'augmenter l'arc de retraite (si comme dans la pratique moderne on ne les conserve égaux), ce qui revient à diminuer la saillie de la roue conduite et à augmenter la saillie de la roue qui mène.

La table suivante donne le rapport de ces saillies pour un engrenage à flancs dans les trois hypothèses suivantes : $F = f$; $F = f\sqrt{2}$; $F = 2f$.

	VALEUR DE $\frac{N_1}{N_2}$.	VALEURS DE $\frac{G_1}{G_2}$.		
		$F = 2f$.	$F = f\sqrt{2}$.	$F = f$.
Le pignon mène.	$\frac{1}{10}$	2,3	1,1	0,5
	$\frac{1}{7}$	2,4	1,2	0,6
	$\frac{1}{5}$	2,5	1,3	0,6
	$\frac{1}{3}$	2,8	1,4	0,7
	$\frac{1}{2}$	3,2	1,6	0,8
La roue mène.	1	4	2	1
	2	5	2,5	1,2
	4	6	3	1,5
	6	6,5	3,2	1,6
	10	7	3,8	1,6

228. *Engrenages épicycloïdaux.*— Reportons-nous à la fig. 192, qui représente les dents tracées avec un même cercle décrivant; soit T h, l'arc de retraite que l'on veut obtenir; décrivez l'épicycloïde interne $h\,d$: d sera par hypothèse le dernier point de contact; A d sera dès lors le rayon maximum de la roue qui mène, et dh le développement strict du flanc de la roue conduite; toujours les contacts, tant d'approche que de retraite, seront situés sur l'une ou sur l'autre des circonférences décrivantes.

On peut faire sur la fig. 192 les mêmes raisonnements que sur la fig. 200, et considérer le diamètre du cercle décrivant comme le même que celui de la roue conduite dans cette dernière figure; et, comme l'arc T h de retraite est égal à l'arc T d ou $2r \times$ angle T D d, on aura pour la saillie G_1 de la roue qui mène :

$$\frac{G_1}{a} = \pi F^2 \left(\frac{2}{\Delta} + \frac{1}{N_1}\right),$$

Δ exprimant ici le nombre des dents que porterait une roue dont le rayon serait égal au diamètre du cercle constant. On aurait de même pour la saillie G_2 des dents de la roue conduite :

$$\frac{G_2}{a} = \pi f^2 \left(\frac{2}{\Delta} + \frac{1}{N_2}\right).$$

Mais il s'agit ici d'établir un système de roues dentées tel que deux roues quelconques de ce système puissent marcher ensemble et conduire ou être conduites; comme d'ailleurs il n'y a pas d'inconvénient à augmenter un peu la saillie, tandis qu'en la diminuant le contact cesse trop tôt et la transmission de mouvement ne satisfait plus aux conditions de rapport de vitesse constant, on adoptera la première formule pour exprimer la saillie G pour toutes les roues du système; de sorte que l'on aura en général :

$$\frac{G}{a} = \pi F^2 \left(\frac{2}{\Delta} + \frac{1}{N_1}\right),$$

Δ étant la plus petite valeur que puisse prendre D_1, et alors $G = \frac{3 \pi F^2 a}{\Delta}$, la plus grande valeur que puisse acquérir la saillie, puisque, d'après la formule ci-dessus, G est d'autant plus grand que N_1 est plus petit.

229. *Engrenages à développantes.* — D'après le mode de construction des engrenages à développantes (fig. 193), il est évident que les contacts se poursuivraient tout le long de la ligne D E, et les arcs d'approche et de retraite seraient dans le rapport des lignes D T, E T, si les dents avaient des longueurs suffisantes.

On diminue à volonté l'arc d'action en diminuant la longueur des dents; et les longueurs interceptées sur la tangente D T, à partir du point T, par les circonférences passant par les contacts extrêmes seront encore dans le rapport des arcs d'approche et de retraite.

Nombres des dents.

230. Pour que la condition qu'il y ait plusieurs dents en prise soit satisfaite par une saillie convenable, il faut que la figure qui nous sert à déterminer cette saillie soit possible, et pour cela il faut que le nombre des dents soit supérieur à un certain nombre minimum pour chaque espèce de roues d'engrenage.

Nous avons vu que les nombres des dents des roues étaient dans le rapport $\frac{n}{n'} = \frac{R}{R'}$, et qu'ainsi il faut prendre pour n et n' deux nombres entiers qui satisfassent à cette relation. Mais ce

rapport ne détermine pas complétement les dents, car chaque division comprend un vide et un plein, et il faut encore savoir quelle épaisseur on devra donner au plein. Cette épaisseur n'est pas arbitraire, elle serait déterminée par la résistance des matériaux, d'après la grandeur de la force à mener, si la largeur de la roue était donnée. Mais dans le cas général, on peut faire varier la largeur de la roue et augmenter ainsi la résistance pour une même largeur et par suite le nombre de dents.

La condition de continuité d'action n'est pas remplie par un nombre quelconque. Il peut arriver, par exemple, qu'une dent de la première roue ne conduise pas assez loin la dent avec laquelle elle est en contact, c'est-à-dire qu'elle l'abandonne avant qu'une autre dent de la première roue soit en prise avec une autre dent de la dcuxième roue. Pour y remédier, il faudrait prolonger le profil de la dent; mais alors, puisqu'elle est symétrique, il faudrait augmenter son épaisseur à la base. Le vide deviendrait donc d'une moindre étendue, et aussi les bases des dents de la deuxième roue; elles pourraient donc alors être trop faibles, en supposant qu'il restât un vide, que la solution fût possible théoriquement pour le nombre de dents considéré. On ne peut donc alors satisfaire à la question qu'en augmentant suffisamment le nombre des dents, c'est-à-dire les nombres n et n'. Ces nombres sont donc susceptibles d'un minimum qui ne doit jamais être atteint dans la pratique; comme il n'y a en général qu'avantage à multiplier le nombre de dents, on se tient dans la pratique à une assez grande distance de cette limite dont la détermination n'offre pas, par suite, beaucoup d'importance. La recherche de cette limite mène à des calculs assez compliqués qui se réduisent à résoudre, pour chaque cas, le triangle rectiligne qui répond à la position extrême des dents. M. Savary, en les effectuant, en a déduit les résultats suivantse

Appelant μ le rapport $\frac{n}{n'} = \frac{R}{R'} = \mu$, moindre que l'unité, il a trouvé qu'on devait toujours avoire

Dans l'engrenage à flancs, $n' =$ ou $> 10\,(1 + \mu)$;

Dans l'engrenage à lanterne, $n' =$ ou $> 7 + 4\,\mu$;

Dans l'engrenage à développantes $n' =$ ou $> 16 + 2\,\mu$.

M. Willis a repris cette question du nombre minimum de dents et l'a traitée en tenant compte du rapport des arcs d'approche et de retraite. Il l'a résolue surtout à l'aide de tracés sur une grande échelle.

Nous lui empruntons les tableaux suivants qui résument ses recherches.

231. *Engrenages à lanterne*. — Les tables suivantes donnent, en fonction du pas, le diamètre que devrait recevoir le fuseau pour qu'une dent entrât en prise précisément au moment où la dent précédente abandonnerait son fuseau. Les cas impossibles sont indiqués par le signe —; le signe + indique que le diamètre du fuseau peut être plus grand que la moitié du pas, que par conséquent cette dimension peut être employée dans la pratique.

TABLE PREMIÈRE.

Le pignon conduit et les fuseaux sont à la roue.

	VALEUR DE $\frac{R_1}{R_2}$	DIAMÈTRE DES FUSEAUX. NOMBRE DE DENTS AU PIGNON.						
		2	3	4	5	6	7	8
Dents intérieures.	3	0,63	+	+	+	+	+	+
	4	0,28	+	+	+	+	+	+
	8	—	0,64	+	+	+	+	+
Crémaillère (1)...		—	0,34	0,73	+	+	+	+
Dents extérieures.	8	—	—	0,58	+	+	+	+
	6	—	—	0,51	+	+	+	+
	5	—	—	0,46	+	+	+	+
	4	—	—	0,37	+	+	+	+
	3	—	—	0,18	0,59	+	+	+
	2	—	—	—	0,37	0,63	0,75	+
	1	—	—	—	—	0	0,38	0,57

(1) La crémaillère doit être considérée comme une roue d'engrenage d'un diamètre infiniment grand, d'un nombre infini de dents. Le rapport des rayons de la crémaillère et du pignon est infini.

TABLE DEUXIÈME.

La roue conduit et les fuseaux sont au pignon.

	VALEUR DE $\frac{R_1}{R_2}$.	DIAMÈTRE DES FUSEAUX. NOMBRE DE FUSEAUX AU PIGNON.						
		2	3	4	5	6	7	8
Dents extérieures.	1	—	—	—	—	0,00	0,38	0,57
	2	—	—	—	0,20	0,51	0,66	+
	3	—	—	—	0,39	+	+	+
	4	—	—	0,01	0,46	+	+	+
	5	—	—	0,10	0,50	+	+	+
	6	—	—	0,16	+	+	+	+
	8	—	—	0,22	+	+	+	+
	10	—	—	0,26	+	+	+	+
Crémaillère. . . .		—	—	0,38	+	+	+	+
Dents intérieures.	8	—	0,01	0,49	+	+	+	+
	6	—	0,10	+	+	+	+	+
	4	—	0,23	+	+	+	+	+

Exemple. — On demande le plus petit nombre de dents et de fuseaux à donner au système d'une roue d'un diamètre 4 conduisant un pignon d'un diamètre 1n

On a ici $\frac{R_1}{R_2} = 4$, et la ligne horizontale de table 2e, qui correspond à ce rapport, montre : 1° que pour 4 fuseaux au pignon, et par suite 16 dents à la roue, le diamètre du fuseau devrait être réduit à un centième du pas, dimension inapplicable; 2° qu'en donnant cinq fuseaux au pignon et 20 dents à la roue, le diamètre du fuseau est les 0,46 ou très-voisin de la moitié du pas; donc :

6 fuseaux et 24 dents,

7 fuseaux et 28 dents

sont applicables à la pratique.

232. Engrenages à flancs.

PREMIÈRE TABLE.

ROUE DENTÉE EXTÉRIEUREMENT.

Table du moindre nombre de dents extérieures que puisse recevoir une roue qui engrène avec des pignons donnés, en supposant épaisseure= creux.

	NOMBRE DE DENTS AU PIGNON DONNÉ.	NOMBRE MINIMUM DE DENTS A LA ROUE.	
		Si la roue conduit.	Si le pignon conduit.
Arc de retraite =pas.	5	Impossible.	Impossible.
	6	»	176
	7	»	52
	8	»	35
	9	»	25
	10	(Crémaillère).	23
	11	54	21
	12	30	19
	13	24	18
	14	20	17
	15	17	16
	16	15	»
Arc de retraite $= \frac{3}{4}$ du pas.	3	Impossible.	Impossible.
	4	»	35
	5	»	19
	6	»	14
	7	31	12
	8	16	10
	9	12	10
	10	10	10
Arc de retraite $= \frac{2}{3}$ duipas.	2	Impossible.	Impossible.
	3	»	36
	4	»	15
	5	»	13
	6	20	10
	7	11	9
	8	8	8

DEUXIÈME TABLE.

ROUES DENTÉES INTÉRIEUREMENT.

233. Dans le cas des engrenages intérieurs, pour un même pignon, l'arc d'action de la roue dentée intérieurement augmente à mesure que son propre nombre de dents est plus petit; comme on le verrait facilement en refaisant le dessin de la fig. 200 pour deux cas d'engrenages intérieurs engrenant avec un même pignon. C'est donc ici le *plus grand* nombre de dents d'une roue pouvant marcher avec un pignon donné qu'il s'agit de fixer. Ces limites sont résumées dans la table suivante.

	NOMBRE DE DENTS DU PIGNON DONNÉ.	PLUS GRAND NOMBRE DE DENTS A LA ROUE.	
		Si la roue conduit.	Si le pignon conduit.
Arc de retraite = pas.	2	Impossible.	5
	3	»	12
	4	»	26
	5	»	85
	7	14	Quelconque.
	8	25	»
	9	60	»
Arc de retraite = $\frac{3}{4}$ du pas.	2	Impossible.	10
	3	»	77
	4	5	Quelconque.
	5	12	»
	6	77	»
Arc de retraite = $\frac{2}{3}$ duepas.	2	Impossible.	14
	4	8	Quelconque.
	5	64	»

234. Ces tables montrent que l'on peut employer dans l'engrenage extérieur à flancs un plus petit pignon pour mener que pour être mené. Ainsi, la plus petite roue qui puisse mener un

pignon de onze ailes a 54 dents, tandis que le même pignon peut conduire une roue de 21 dents.

Elles montrent encore qu'un pignon de moins de dix ailes ne peut être mené dans cette condition, tandis que des pignons de six ailes peuvent conduire des roues portant des nombres quelconques de dents plus grands que ceux de la table.

Enfin, on doit remarquer que, les limites indiquées ci-dessus étant géométriquement exactes, on devra toujours dans la pratique employer plus de dents que la table n'en indique.

235. *Engrenages épicycloïdaux.* — Le plus petit nombre de dents peut se déduire du cas précédent, et à cet effet on considère les nombres qui sur les tables correspondent aux roues conduites comme exprimant les nombres de dents qui appartiendraient à une roue dont le rayon serait égal au diamètre du cercle décrivant.

Ainsi l'arc de retraite étant égal au pas, et le cercle décrivant étant celui d'une roue de 12 dents, la plus petite roue qui puisse conduire serait une roue de 30 dents au moins.

Principales dimensions des dents.

236. D'après les résultats de la théorie de la résistance des matériaux et ceux de l'expérience, on peut poser les conditions ci-après comme devant être combinées avec les précédentes.

Largeur de la jante. — Quatre fois l'épaisseur des dents quand la vitesse à la circonférence n'excède pas $1^{m},50$ par seconde; cinq fois pour des vitesses supérieures, afin de diminuer l'usure.

Épaisseur. — Soit P la force en kilogrammes que l'engrenage doit transmettre, b l'épaisseur de la dent en centimètres, mesurée sur la circonférence primitive; on déduit de l'observation des dimensions adoptées par les meilleurs constructeurs :

Pour les jantes en fonte.	$b = 0{,}105\sqrt{P}$.
— en bronze ou *cuivre*. . . .	$b = 0{,}131\sqrt{P}$.
— en charme ou sorbier. .	$b = 0{,}138\sqrt{P}$.

Saillie. — La saillie doit être en rapport avec l'épaisseur, et se répartir ainsi qu'il suit relativement à la circonférence primitive, a étant le pas :

Saillie de la dent en dehors de la circonférence primitive.	0,3 a.
Hauteur utile de la dent. . e . e	0,6 a.
Hauteur totale de la dent.	0,7 a.

DU FROTTEMENT DANS LES ENGRENAGES.

237. Représentons par N la pression normalement aux courbes en contact, fN sera la valeur du frottement. Le chemin parcouru par ce frottement, pour une rotation correspondant à un arc infiniment petit ds des deux circonférences primitives, est celui du glissement que nous avons trouvé égal pour une courbe quelconque et son enveloppe à $p\,ds\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$ pour l'engrenage extérieur (et $p\,ds\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)$ pour l'engrenage intérieur).

Le travail absorbé par le frottement sera donc en chaque instant :

$$f\,N\,p\,ds\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right).$$

A mesure que le nombre des dents augmente, la normale p se rapproche de plus en plus de la tangente au point de contact des circonférences primitives, et par suite la force N se rapproche beaucoup de la force résistante Q, qui agit tangentiellement à la circonférence, pour le cas du mouvement régulier que nous considérons, puisque Q = N sin. α (art. 220) et que α approche beaucoup de 90°; la valeur $Qf\,p\,ds\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$ est donc une limite vers laquelle tend l'expression du travail du frottement en chaque instant quand on augmente le nombre des dents, et qui ne pèchera que par un léger excès quand ce nombre ne sera pas

considérable. Prenons donc cette expression pour valeur du travail du frottement en un point de contact pour lequel la normale est p, et pour un arc ds.

Le contact a lieu, en général, également de chaque côté de la ligne des centres pour laquelle $p=o$ et le frottement est nul. Comme d'ailleurs la direction de la normale se rapproche beaucoup de la tangente au point de contact des deux cercles primitifs, on peut, pour avoir la valeur moyenne du travail du frottement pour les diverses positions de l'arc ds, remplacer la valeur moyenne de 0 à p (1) ou $\frac{p}{2}$, par une longueur de l'arc s de roulement égale à une demi-division $\frac{a}{2}$, c'est-à-dire $\frac{\pi R}{n}$; on a alors :

$$[1] \ldots T_f = Q f \frac{\pi R}{n} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) ds,$$

et comme $\frac{R}{R'} = \frac{n}{n'}$ $T_f = Q f \pi \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} \right) ds,$

l'expression $Q ds$ est est celle du le travail résistant élémentaire qui devient le travail T_r, dû à la force résistante qui agit sur la deuxième roue pour un tour de celle-ci; le travail du frottement est donc alors :

$$T_f = \pi f T_r \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} \right) \ldots . [3]$$

(1) Si l'on compare le frottement moyen, *à amplitude égale*, lorsque le contact a lieu d'un seul côté de la ligne des centres ou également de chaque côté, on voit que les valeurs moyennes de p peuvent être considérées comme doubles dans le premier cas de ce qu'elles sont dans le second et par suite aussi le travail du frottement. C'est par ce motif que, dans la pratique moderne, on met les dents en prise également de chaque côté de la ligne des centres; les progrès de l'art de la construction des machines permettant de le faire sans aucun danger.

Si, au lieu de supposer les arcs d'approche et de retraite égaux, on admet qu'ils sont dans un rapport m, l'expression ci-dessus du travail du frottement devrait être multipliée par le facteur $\frac{1+m^2}{(1+m)^2}$.

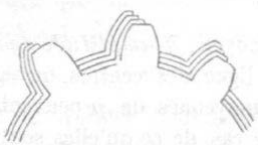
Comme les forces motrices et résistantes P et Q sont très-peu différentes et T_m le travail moteur transmis pendant un tour de roue peu différent du travail résistant, lui étant seulementtun peu supérieur, on peut encore prendre pour valeur duttravail dû au frottement pendant le même temps:

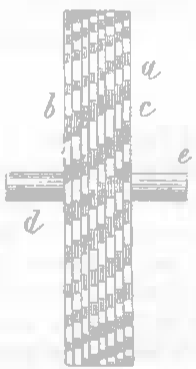
$$T_f = \pi f T_m \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} \right).$$

D'après la formule [3], on voit que le travail du frottement est proportionnel à l'expression $\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}$ [et à $\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}$ pour les engrenagesintérieurs, pourlesquels il estdonemoindrequepour les engrenages extérieurs, à nombre detdentségal], c'est-à-dire d'autanttmoindre que le nombredes dents est plus grand. D'où l'on conclutcetterègle de la pratique qu'il fauttmultiplierautant que possible le nombre des dents pour diminuer le travail du frottement, avoirtmoinstd'usure, des mouvements plusdoux.

Engrenages sans frottement de glissement.

238. Puisque le frottement diminue quand le nombredetdents augmente, on peut rendrecctfrottement presque nul par la disposition représentéesur la fig. 201, qui consiste, au lieu de faire





les profils des roues cylindriques, de les former de profils égaux et de faibleépaisseur,ayanttourné lesuns sur lestautres, d'une

quantité aussi petite qu'on le voudra. Les dents figureront une suite de degrés semblables aux marches d'un escalier.

Les dents de l'autre roue devront pareillement être formées de flancs superposés, et correspondre aux dents de la première roue. Elles formeront de même une sorte d'escalier (fig. 201) dont les degrés correspondront à ceux de la première roue de manière à venir se mettre successivement en contact avec eux dans le mouvement des deux roues. Le frottement sera d'autant moindre que le nombre de ces degrés sera plus grand, car le nombre des dents de chaque roue sera multiplié par le nombre des plaques superposées.

239. On peut supposer le nombre des plaques infini, de manière que les profils des roues forment une surface continue, qui rencontrera une surface cylindrique dont les génératrices seraient parallèles à l'axe de la première roue, suivant une certaine courbe.

Les profils des dents de la deuxième roue formeront de même une surface continue; ils rencontreront la seconde surface cylindrique primitive, suivant une deuxième courbe. Les points correspondants des deux courbes viendront en contact dans le mouvement des deux roues.

On voit que, dans ce mouvement, les deux surfaces seront à chaque instant en contact par un seul point situé sur une ligne représentant un profil de dent *sans épaisseur;* et après le plus petit mouvement de rotation, elles seront en contact dans un autre plan sur un autre profil de dent, également sans épaisseur; il n'y aura donc pas de frottement de glissement, comme l'indique la formule qui donne l'expression de ce frottement lorsque n et n' deviennent infinis, mais seulement un frottement de roulement.

On peut prendre la ligne des contacts (fig. 203) sur le premier cylindre tout à fait arbitrairement; il faudra seulement que la ligne correspondante sur le deuxième cylindre soit telle que dans le mouvement de rotation des deux cylindres les points de ces deux lignes viennent successivement en contact. Pour cela, la

première ligne étant prise à volonté, on la développera sur un plan tangent au cylindre, puis on enroulera ce plan sur le deuxième cylindre. La courbe se trouvera de la sorte convenablement tracée.

Il est plus simple de tracer une ligne dans le plan tangent aux deux cylindres, et d'enrouler successivement ce plan sur ceux-ci; on applique de la sorte la ligne tracée successivement sur le plan sur les deux cylindres, sur lesquels elle engendre deux courbes convenables, puisqu'elle viendront se superposer successivement lors de la rotation simultanée. Pour mettre ces courbes en saillie et les adapter à des cylindres d'un moindre diamètre que les précédents, on fait passer par celles-ci des surfaces saillantes engendrées par les normales aux cylindres formant le noyau, menées par les divers points de la courbe.

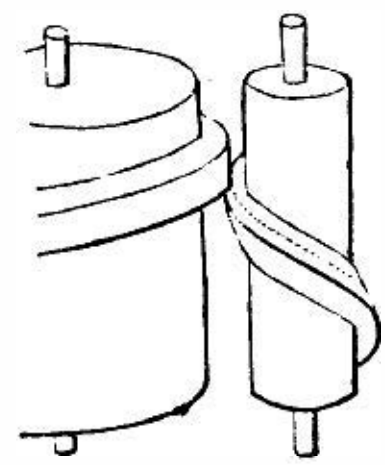


Fig. 203.

Ces deux surfaces, suffisamment prolongées, représentent deux dents continues qui ne se toucheront toujours qu'en un point situé sur les courbes qui leur servent de base.

La solution la plus simple consiste évidemment à prendre une ligne droite dans le plan tangent, à considérer comme régulière la progression des profils que nous avons supposés. La fig. 203 représente cette disposition de deux surfaces héliçoïdales.

Le contact ayant lieu par une arête, celle-ci s'émoussera par l'usage (fig. 204 et 205), mais pour de petits efforts l'arête se

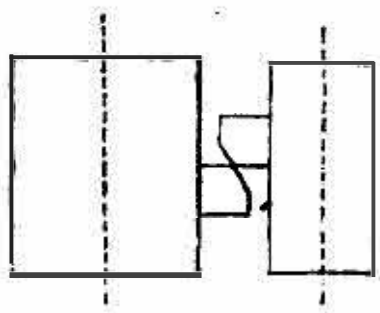


Fig. 204.

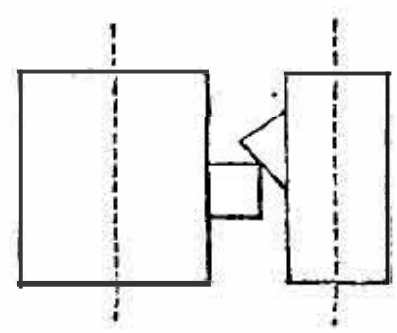


Fig. 205.

trouvera remplacée par une partie circulaire pour laquelle le contact a lieu à peu près comme sur l'arête vive. Ces engrenages,

inventés par Hooke en 1674, et réinventés de nos jours par White, sont dits de précision ; le contact n'ayant lieu que par un point, ils ne pourraient, sans s'user très-rapidement, transmettre des efforts considérables. M. Bréguet les a utilisés avec succès pour faire mouvoir des axes avec une vitesse extrêmement considérable, pour de petits appareils très-légers, de plus de deux mille tours par seconde.

Pour des trous de peu d'épaisseur, les fractions d'hélices, pouvant se confondre avec de petites lignes droites inclinées (fig. 208), sont faciles à exécuter, et pourront s'employer avec avantage dans des machines construites avec soin, dans lesquelles de petites forces sont en jeu.

Les fig. 206 et 207 montrent la disposition de roues d'engre-

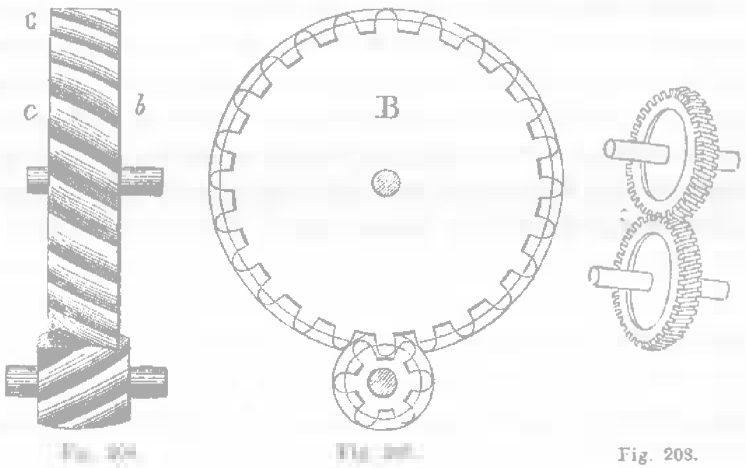


Fig. 208.

nages plus épaisses construites tainsi que nous venons de l'expliquer, et en se reportant à ce que nous avons dit précédemment pour les autres conditions à remplir par tout engrenage. La pression oblique sur les pivots qui résulte de l'inclinaison des faces des dents sur les axes dans ces roues d'engrenage, en fait quelquefois accoler deux inclinées en sens inverse sur un même axe, ou tailler ainsi sur une même couronne.

Il peut sembler que l'on eût dû étudier ces engrenages à frottement de roulement, en traitant dans la première section de

ce chapitre des organes agissant par contact immédiat et à frottement de roulement. Mais il faut remarquer que nous ne parlions que des sections planes de rouleaux et de dents cylindriques; alors il est exact de dire, comme nous l'avons démontré, que des cercles peuvent seuls se conduire avec frottement de roulement.

Dans le cas que nous considérons actuellement au contraire, et qui ne pouvait guère être compris qu'après ce que nous avons dit sur les engrenages à frottement de glissement, le contact change de plan à chaque instant, quitte le plan perpendiculaire à l'axe, en un point, pour entrer dans un plan parallèle passant par le point suivant.

Malgré l'avantage de la diminution des résistances passives, ces engrenages ne sauraient être substitués à ceux décrits précédemment, parce qu'ils ne peuvent servir à transmettre des efforts un peu considérables, le contact n'ayant jamais lieu que par un point. Il est facile de démontrer que le contact entre les dents ne saurait avoir plus d'étendue, car s'il avait lieu suivant une ligne, le lieu des contacts successifs engendrerait une surface et non plus une courbe. La section par un plan perpendiculaire à l'axe déterminerait donc deux courbes planes, qui se conduiraient dans un rapport de vitesse constant, et cependant ne seraient pas des cercles, ce que nous avons vu être impossible.

ORGANES OU L'ACTION A LIEU A L'AIDE D'INTERMÉDIAIRES RIGIDES.

240. Le mouvement d'un axe à un autre se transmet à l'aide d'intermédiaires rigides, en adaptant à deux organes du système tour une barre, dite bielle, qui assemble deux points de ceux-ci en pouvant tourner autour d'eux.

Nous avons établi que *les vitesses angulaires des deux rayons, des deux bras des manivelles, sont entre elles, à chaque instant, en raison réciproque des segments de la ligne des centres, déterminés par la rencontre de cette droite avec la direction de la bielle.*

Comme il évident, *à priori*, que ce point se déplace sur la ligne

des centres, la bielle paraît impropre à transmettre la vitesse d'un axe à un autre dans un rapport constant. Cela est vrai pour le cas général, mais si le point d'intersection C de la bielle et de la ligne des centres (fig. 209) est placé à une distance infinie, ce qui aura lieu pour toutes les positions possibles du système, si la bielle *df* est parallèle et égale à la ligne des centres BD, alors les bras seront égaux, les vitesses angulaires deviendront elles-mêmes égales, et leur rapport sera dès lors constant. Dans tous les autres cas, le point C se déplaçant, le rapport des vitesses est constamment variable. Donc, le transport du mouvement circulaire à distance, par l'intermédiaire de bielles, ne s'effectue de manière que le rapport des vitesses angulaires soit constant que pour des vitesses angulaires égales des axes.

241. La disposition d'égalité entre les rayons des deux cercles B et D répond à deux combinaisons, l'une pour laquelle le rapport des vitesses angulaires est constante parce que la bielle et la ligne des centres sont parallèles; l'autre pour laquelle il est variable, suivant une loi que nous indiquerons plus loin, parce que la bielle et la ligne des centres se rencontrent.

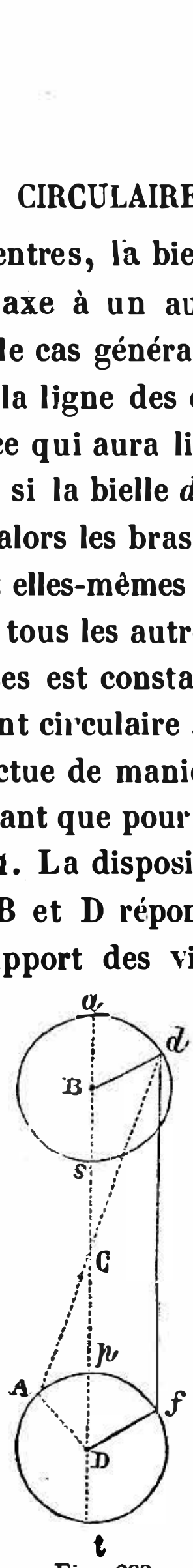


Fig. 209.

Il arrivera en effet que, lorsque, par la rotation du point *d*, ce point passera par la ligne des centres, soit en *a*, soit en *s*, l'extrémité *f* de l'autre bras passera en même temps par la même droite aux points *p* ou *t*. A l'époque de ces deux phases du mouvement, les deux positions possibles *fd*, A *d* de la bielle coïncident; en partantede chacune de ces phases, la bielle, abstraction faite de l'inertie et du poids des pièces, peut en quelque sorte choisir entre ces deux positions. Ainsi, par exemple, en partant de la position *a*B*p*, le point *a* se mouvant vers *d*, le point *p* peut ou s'avancer vers *f*, cas pour lequel la bielle est parallèle à la

ligne des centres, ou reculer vers A, ici aspour lequel la bielle croisera la ligne des centres jusqu'à ce que le point *d* soit parvenu en *s* et le point A en *t*. A cet instant, le cas d'instabilité se présentera de nouveau, i sans toutefois qu'il puisse jamais avoir lieu pour une position quelconque de B*d*, prise entre les positions B*a*, B*s*. Les deux phases d'instabilité, pour lesquelles les deux bras coïncident avec la ligne des centres, se nomment les *points morts* du système.

Lorsque l'on emploiera ce mécanisme dans l'intention que le rapport des vitesses soit constant, il faudra faire en sorte qu'en passant aux *points morts* la bielle conserve son parallélisme avec la ligne des centres. Cela aura lieu lorsqu'une résistance considérable s'opposera au mouvement rétrograde de l'une des roues, par exemple dans le cas bien connu des roues couplées des locomotives (fig. 210).

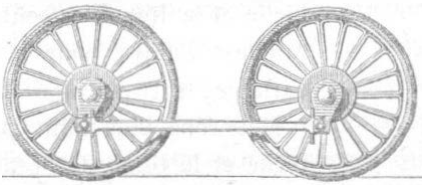


Fig. 210.

242. Trois moyens se présentent pour atteindre ce but :

1° On peut introduire dans le système un troisième bras Cc (fig. 211) égal aux deux autres, dont l'axe sera en ligne droite et situé sur la ligne des centres, et dont l'extrémité *c* devra partager la bielle dans le même rapport que le point C divise la ligne des centres. Le nouvel axe C pent d'ailleurs être placé entre les premiers A et B, ou en dehors de A et B et sur le prolongement de cette droite. Il assure toujours également le parallélisme constant de la bielle et de la ligne des centres.

Il n'est indispensable que les axes des trois bras égaux se trouvent sur une même droite que si la bielle est rectiligne; autrement il suffit, quelle que soit sa forme, que les trois arti-

culations a, b, c forment un triangle égal à celui des trois centres de rotation et semblablement placé.

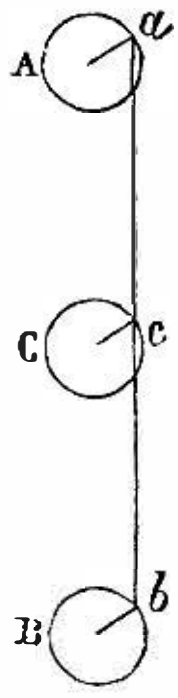


Fig. 211.

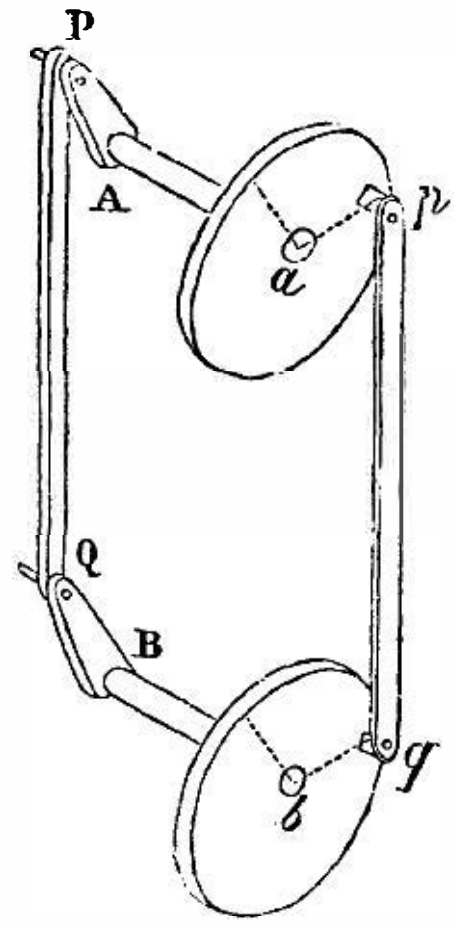


Fig. 212.

243. 2° Le second moyen n'exige que deux axes, mais il y a deux systèmes de bras. La fig. 212 peut en donner une idée. A a, B b sont deux axes parallèles portant à l'une de leurs extrémités deux bras égaux $AP = BQ$ articulés avec la bielle PQ; les autres extrémités des deux axes portent un système semblable. Quant à l'angle compris entre les directions AP et ap, il peut être quelconque, pourvu qu'il ne soit pas nul, mais sa valeur la plus convenable est de 90°, afin qu'un système de bras soit aussi éloigné que possible des *points morts* lorsque l'autre système de bras passe lui-même par ces points. On voit, du reste, qu'il est indifférent de donner telle ou telle autre forme aux pièces de rotation AP ou ap, la longueur du bras n'étant mesurée que par la distance de l'axe à l'articulation dans le plan de rotation.

Si les axes rencontrent le plan dans lequel la bielle se meut, la rotation ne peut jamais être complète si elle n'est fixée à l'extrémité de l'axe, comme fig. 212, ou si on n'emploie, comme on le fait souvent, des axes *coudés*.

244. 3° Le troisième moyen de faire effectuer aux bielles le pas-

sage des *points morts* est indiqué fig. 213 et 214. Ainsi que le précédent, il consiste dans l'emploi de deux ou plusieurs bras et d'un nombre égal de bielles, et s'applique au cas où les axes A*a*, B*b* sont placés à la suite l'un de l'autre. Des disques de forme convenable, comme C, D, sont fixés à l'extrémité libre de chacun d'eux. Des chevilles sont implantées dans les faces de ces disques sur une même circonférence qu'elles divisent en parties égales ; enfin des bielles s'articulent aux chevilles. Les plans de rotation des disques laissent entre eux une distance suffisante pour que les bielles prennent une position un peu oblique qui leur permette de passer par-dessus les chevilles d'attache des autres bielles. Le nombre des bielles est d'ailleurs indifférent, deux (à 90°) suffiraient.

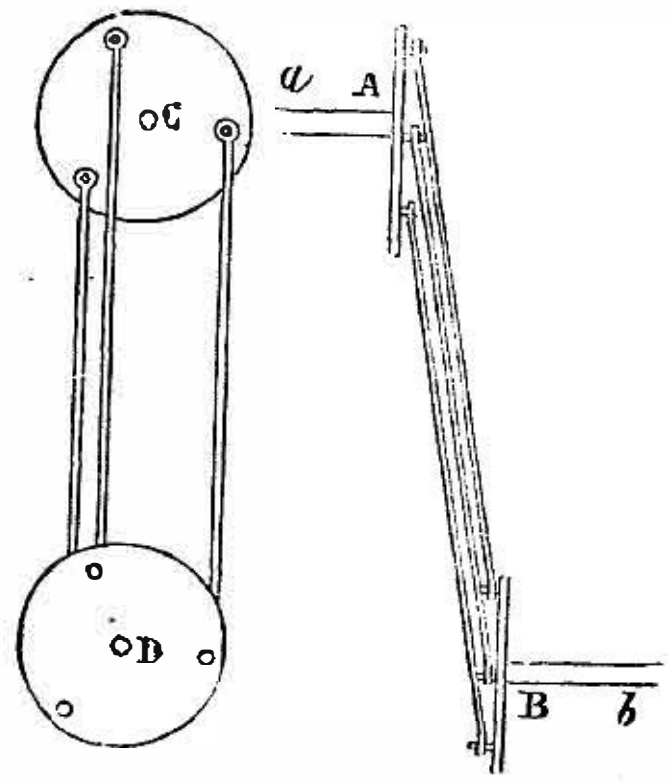


Fig. 213. Fig. 214.

245. *Frottement.* — Le frottement qui s'exerce sur le point d'attache, appelé habituellement le bouton de la manivelle, est facile à évaluer. Si P est la force qui est transmise dans la direction de la bielle, cette force fera toujours porter le bouton de la manivelle au fond du coussinet à l'extrémité de la course descendante et à la partie supérieure à l'extrémité de la course ascendante. Dans chacune de ces courses le frottement se sera donc produit, par suite de la rotation, sur une demi-circonférence du coussinet, c'est-à-dire que le chemin parcouru par le frottement sera πr, r étant le rayon du bouton de la manivelle. Or, la valeur de ce frottement est Pf, donc le travail du frottement pour un tour entier sera $2\pi r Pf$, valeur en général assez petite, r étant petit.

246. Nous citerons encore une disposition curieuse, dite *joint* de *Odlham*, que la figure représente, et qui permet de transmettre,

par une espèce d'articulation à glissement, une égale rotation entre deux axes parallèles qui ne sont pas dans le prolongement l'un de l'autre.

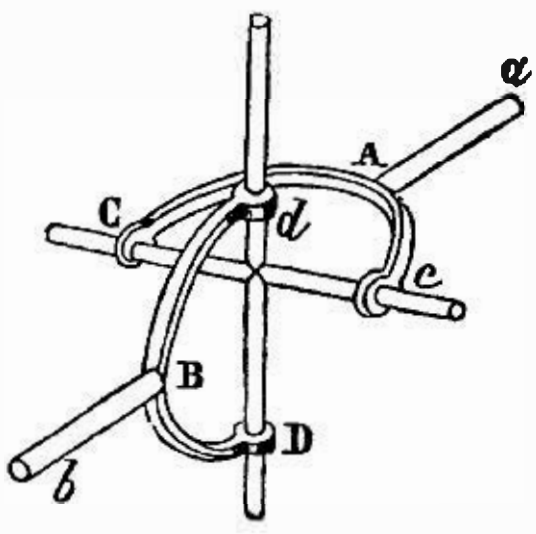


Fig. 215.

A*a*, B*b* étant ces deux axes, l'axe A*a* (fig. 215) est terminé par une pièce demi-circulaire C A *c* formant deux branches, terminées par deux trous forés dans la direction d'une ligne perpendiculaire à l'axe.

L'axe B*b* est muni d'une pièce semblable D B *d*, et tout est ajusté de manière que les quatre trous se trouvent dans un plan perpendiculaire aux deux axes. Une croix à quatre branches polies passe dans ces trous, comme l'indique la figure, et ces branches sont de diamètre convenable pour pouvoir chacune glisser dans les trous qu'elles traversent. Lorsqu'un des axes tourne, il communique à l'autre précisément la même rotation.

Les glissements (égaux pour chaque demi-tour à la distance des deux axes) le long des branches de la croix, c'est-à-dire normalement au mouvement circulaire, ne modifient en rien celui-ci, et les deux axes tournent comme s'ils étaient dans le prolongement l'un de l'autre et assemblés ensemble. Il n'est pas besoin de dire que cet organe n'est que curieux, et que les frottements et les torsions qui s'y produisent le rendent tout à fait défectueux dans la pratique.

2° Rapport de vitesse variable.

Passons en revue les divers systèmes propres à fournir la transmission du mouvement circulaire continu entre axes parallèles dans un rapport de vitesse variable. Les solutions appliquées dans le cas d'un rapport de vitesse constant doivent toutes trouver ici leur application, en modifiant leur tracé par la substitution des courbes de nature elliptique aux circonférences primitives employées dans le premier cas.

247. *Tambours elliptiques.* — Il semble *à priori* que des tambours elliptiques pourraient conduire des axes par contact, de la même manière que des rouleaux cylindriques. Cela est en effet possible tant que le rayon du tambour moteur qui passe par le point de contact va en augmentant; mais quand il diminue, il ne peut plus agir par seule pression.

248. *Courroies.* — Si l'on fait passer autour de courbes de formes convenables, elliptiques par exemple comme celles que nous avons déterminées, une courroie sans fin, on conduira les deux axes dans les mêmes rapports de vitesse que si les deux courbes se menaient par roulement.

Il faut remarquer que, la figure formée par la courroie ne restant pas toujours la même, il faut que celle-ci ait une longueur suffisante et qu'un rouleau de tension mobile assure la possibilité de toutes les figures en même temps que l'adhérence.

Pour les courbes à plusieurs ventres, il faudrait de plus que la courroie fût astreinte à quitter successivement et sans soubresauts les divers points de la courbe, et notamment les parties rentrantes, ce qu'il serait difficile d'obtenir simplement. De semblables systèmes ne sont pas employés dans la pratique.

Ce genre de communication de mouvement n'est guère employé que pour obtenir un grand nombre de révolutions de vitesses variables d'un axe pour un tour de l'autre axe, comme dans le système ci-après.

A est la poulie motrice (fig. 216), dont le contour est disposé pour recevoir une corde sans fin. Il en est de même de la poulie conduite C. Une poulie mobile D portant un poids ou un rouleau déterminant toujours une tension suffisante, le mouvement sera transmis entre les deux axes sans glissement, et dans des rapports de vitesse variables. En effet, abaissant des deux centres A et C les perpendiculaires Ap, Cq sur la direction de la courroie, le mouvement

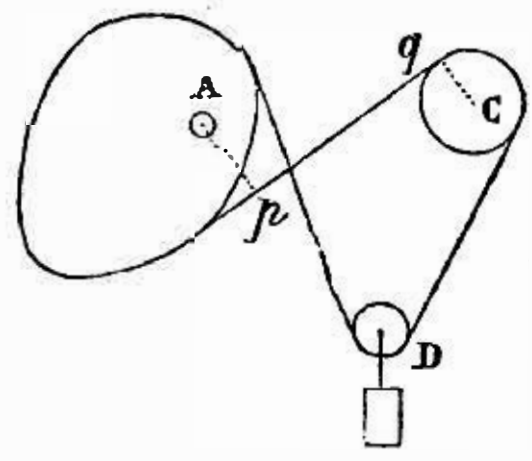


Fig. 216.

produit est pour chaque instant pendant lequel rien ne se change dans la figure (art. 155).

$$\frac{\text{Vitesse angulaire de A}}{\text{Vitesse angulaire de C}} = \frac{Cq}{Ap} = \frac{r}{Ap'}$$

si une des poulies est circulaire et de rayon r.

249. On obtiendra tous les rapports voulus de vitesse angulaire de deux arbres par des formes de poulies convenables, en faisant varier les perpendiculaires Ap, Cq suivant la loi donnée. Telle est la disposition employée dans les montresi, et connue sous le nom de fusée.

Un des axes porte un tronc de cône entaillé en spirale sur toute sa hauteur, l'autre, parallèle au premier, un cylindre (fig. 217). Une chaine qui est enroulée en partie sur chacune desi surfaces est fixée par une de ses extrémités à chacune d'elles. La chaine enroulée sur le cône, se déroulant de celui-ci pour s'enrouler sur le cylindre, produira un mouvement dont la vitesse angulaire variera en raison du tracé des spirales.

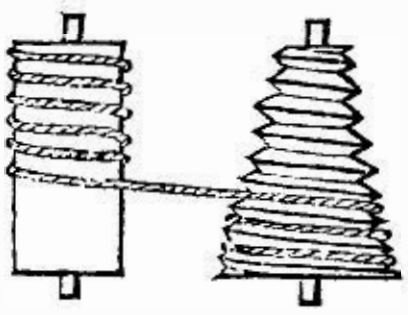


Fig. 217.

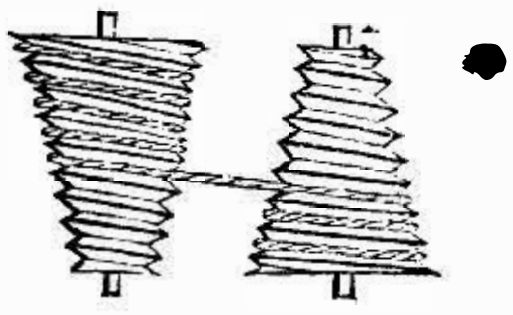


Fig. 218.

On peut de même employer deux fusées coniques, au lieu d'une fusée et d'un cylindre, comme fig. 218.

ORGANES AGISSANT PAR CONTACT IMMÉDIAT.

250. Les courbes elliptiques que nous avons étudiées étant assimilées aux circonférences primitives roulant l'une sur l'autre que nous avons considérées dans le cas des engrenages, on résoudra le problème de transmettre sûrement le mouvement dans le même rapport de vitesse que si ces courbes roulaient

l'une sur l'autre, en les armant de dents engrenant les unes avec les autres.

Les dents devront être également espacées, pour que des longueurs égales des ellipses primitives passent au point de contact. Quant à leurs formes, elles se détermineront par les principes déjà posés, et un point d'une ellipse roulant sur une autre décrira une épicycloïde elliptique. En général une des courbes étant donnée, l'autre sera son enveloppée déterminée par ses positions successives, en raison de la nature du mouvement. Un point d'une courbe quelconque, roulant intérieurement sur une des circonférences primitives de rayon variable passant à chaque instant par le point de contact des courbes, et extérieurement sur l'autre, engendrera des profils de dents qui se mèneront avec frottement de glissement, et qui conduiront les axes absolument dans les mêmes rapports de vitesse que si les deux courbes roulaient l'une sur l'autre.

Si, dans le plan tangent aux deux cylindres ayant pour base les deux courbes elliptiques, on trace une ligne, une droite par exemple, inclinée sur les génératrices, qu'on enroule ce même plan autour des deux cylindres, il est évident que, pendant le roulement de ceux-ci, les divers points des lignes tracées sur les deux cylindres viendront successivement en contact. Si donc on met ces deux courbes en saillie, en faisant passer par leurs points des normales aux cylindres elliptiques qui forment le noyau, qu'enfin on munisse ceux-ci de dents qui se touchent suivant ces courbes, le mouvement sera communiqué dans les conditions voulues et seulement avec un frottement de roulement.

251. Comme nous l'avons dit, deux ellipses ne peuvent pas se mener par simple contact; ainsi, dans la figure 219, la courbe supérieure marchant de droite à gauche, quand le point m aura coïncidé avec M, le rayon vecteur de l'ellipse motrice tendant à diminuer, le mouvement ne saurait être communiqué par simple pression; il faut alors nécessairement armer de dents la moitié du contour des deux ellipses, comme le représente la figure, pour que la transmission du mouvement ait lieu. Le

mouvement est ainsi maintenu jusqu'à ce que *a* ait atteint A, ensuite la position des deux rouleaux rend les dents inutiles, si

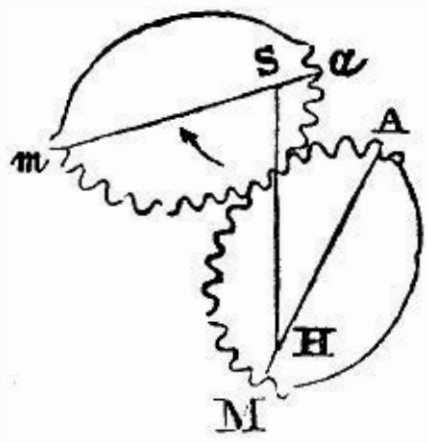


Fig. 219.

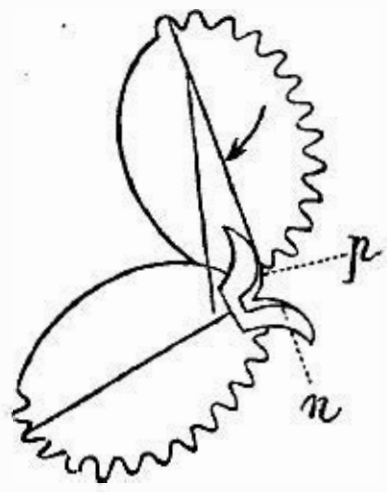


Fig. 220.

les pressions sont suffisantes. Toutefois, comme il peut y avoir glissement dans la pratique, et qu'alors la reprise des dents n'aurait plus lieu dans les rapports de position voulue, on fixe quelquefois la position respective des deux roues au moment de l'engrènement, à l'aide du système représenté fig. 220. Une cheville *p* est fixée à l'une des roues et une fourche *n* à l'autre, et la prise des dents ne commence que lorsque la cheville est parvenue exactement au fond de la fourche, c'est-à-dire lorsque les deux roues sont dans des positions convenables.

252. La difficulté d'obtenir une paire de courbes elliptiques est quelquefois évitée par le système représenté fig. 221. A est une roue elliptique tournant autour de son centre B, et dont le contour est garni de dents; C est un pignon circulaire garni de dents semblables à celles de la roue. Le centre de ce pignon n'est pas fixe, mais porté par un levier qui tourne autour du centre D. Quand A tourne, le levier s'élève avec le pignon qui tourne avec la vitesse correspondante à la longueur du rayon qui passe au point de contact. Pour que les dents restent toujours dans la position la plus convenable pour leur action, la roue A porte une plaque qui lui est attachée, et l'axe de C

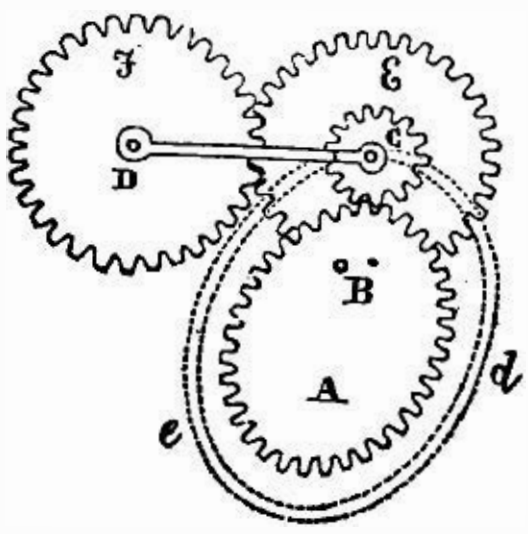


Fig. 221.

passe dans une rainure *de* pratiquée dans cette plaque. Cette rainure est distante de l'ellipse primitive de la roue elliptique d'une longueur égale à celle du rayon primitif du pignon, mesurée sur la normale en chaque point. Quand donc la roue A tourne, la rainure se meut aussi; les dents de la roue et du pignon restent toujours en prise.

Soit r le rayon de C, R le rayon de A au point de contact, ω, ω' les vitesses angulaires des deux axes, φ l'angle de R et r au point de contact, on a :

$$\frac{\text{Vitesse angulaire de A}}{\text{Vitesse angulaire de C}} = \frac{\omega}{\omega'} = \frac{R}{r}\cos.\varphi;$$

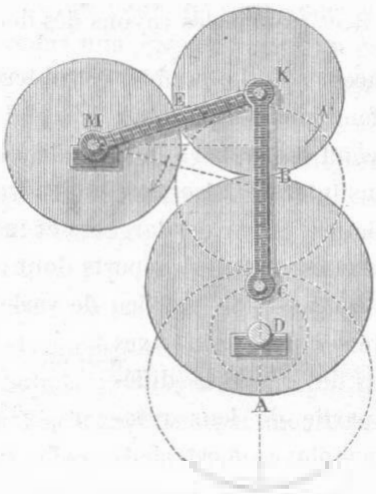
car $r\omega = R\omega'\cos.\varphi$: puisque lors de chaque rotation instantanée les longueurs qui passent au point de contact sont égales à un arc d'ellipse dont la longueur est $r\omega$, et la direction fait l'angle avec l'élément circulaire décrit du centre A. Ces systèmes, dans lesquels entrent des axes mobiles, constituent des organes doués de propriétés spéciales que nous étudierons plus loin en détail.

Comme le centre de C fait des oscillations, il est nécessaire, en général, de communiquer le mouvement à un axe fixe; pour cela, la roue E étant fixée au pignon C, on fait engrener celle-ci avec une seconde roue F, concentrique au levier. Lorsque A tourne, la rotation de C est communiquée par la roue E à la roue F, et c'est dans le mouvement de celle-ci que se combinent les oscillations du levier et la rotation du pignon qui lui communiquent exactement le mouvement de la roue elliptique.

253. A une roue elliptique l'on substitue quelquefois une roue circulaire A (fig. 222) se mouvant autour d'un point D différent de son centre; on maintient à l'aide d'une barre le centre K d'une roue mobile reposant sur la première à la distance convenable du centre C, comme dans l'exemple précédent. Cette combinaison, formée exclusivement de roues ordinaires, est une des plus simples pour varier le rapport des vitesses angulaires.

Appelant e l'excentricité AD, r le rayon A, R le rayon K, on

aura pourvaleur des rapports extrêmes, *maxima* et *minima* des vitessesangulaires, le rapport de R à $r - e$ et $r + e$.



254. *Rouesde Roëmer.* — Ces roues avaient été proposées par l'astronome Römer pour varier le mouvement dans les machines planétaires destinées à reproduire les mouvements des astres. Elles reposent sur le principe que, les roues d'engrenage étant en réalité des cylindres, il est facile d'obtenir un mouvement varié en accolant des séries d'engrenages différents, et variant progressivement.

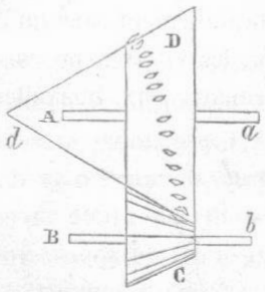


Fig. 223.

A*a*, B*b* (fig. 223) sont deux axes parallèles dont l'inférieur est muni d'une roue conique, portant comme à l'ordinaire des flancs dans toute sa hauteur. A l'opposé un cône D est fixé à l'axe A*a* et son sommet *d* est à l'opposé de celui du premier cône; il est déterminé par la rencontre de l'axe A*a* et d'une génératrice du cône C. Plaçant sur ce cône des chevilles, des dents d'engrenage de forme convenable pour la section par un plan

perpendiculaire aux axes, à différentes distances du sommet d, on obtiendra les rapports de vitesse que l'on voudra entre les limites $\frac{r}{R_1}$ et $\frac{R}{r_1}$, R et r étant les rayons des deux faces de D, r_1 et R_1 ceux des faces de C. Le premier est obtenu en plaçant des chevilles faisant fonctions des dents sur le bord de la face la moins large de D, le second sur le bord de celle du plus grand rayon. Dans des positions intermédiaires, on obtiendra des rapports de vitesses intermédiaires, et par des largeurs et inclinaisons convenables des génératrices, tous les rapports dont on aura besoin.

255. *Secteurs dentés.* — Si, au lieu de varier d'une manière continue, les vitesses des deux axes devaient être dans des rapports différents dans une partie de leur rotation, on pourrait employer, à cet effet, la combinaison d'engrenages représentée figure 224. Deux roues sont entaillées dans une partie de leur circonférence et remplacées par des segments d'autres roues montées sur les mêmes arbres, dont les rayons sont en raison inverse des nouvelles vitesses qu'il s'agit d'obtenir.

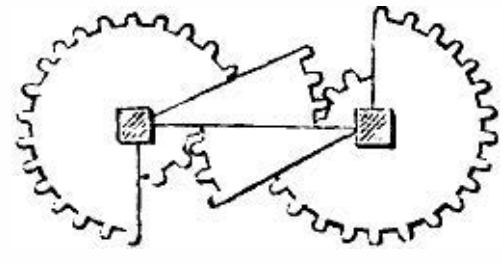


Fig. 224.

Le grand défaut de semblables systèmes, comprenant des secteurs d'un plus ou moins grand nombre de roues, réside dans la difficulté du passage d'une roue à l'autre. L'action des dents des diverses roues ne peut se succéder instantanément sans qu'il se produise choc et destruction des dents, les vitesses ne correspondant plus, au moment du changement, aux nouvelles circonférences primitives.

256. Le cas le plus remarquable de variation instantanée de rapport de vitesse, et celui qui trouve le plus d'applications, est celui du mouvement intermittent, lorsque la roue

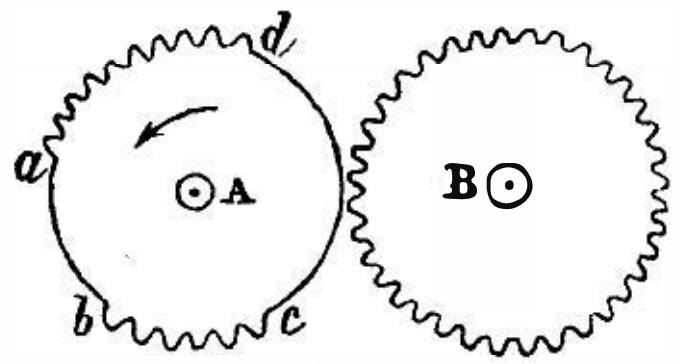


Fig. 225.

menée passe alternativement du repos au mouvement, *et vice versâ*.

On obtient cet effet à l'aide de deux roues dentées ordinaires (fig. 225), en enlevant à la roue menante un certain nombre de dents, comme le montre la figure. En proportionnant les longueurs des arcs garnis de dents à celles des arcs qui n'en sont pas munis, on obtient toutes les intermittences voulues de la deuxième roue pour une révolution de la roue menante. Ainsi dans le cas de plusieurs machines-outils, la roue conduite doit tourner d'une dent pour un tour de la roue qui mène; celle-ci se réduit alors à une seule dent, à un crochet qui vient faire tourner la roue conduite de $\frac{1}{n}$ de tour, si elle porte n dents.

Ces systèmes de dents espacées ont un inconvénient analogue à celui dont nous avons déjà parlé (art. 220). L'axe conduit ne s'arrêtant pas instantanément, les dents de la roue B (fig. 226) peuvent ne pas se trouver en prise avec celles de la roue A au moment voulu. On peut employer alors une fourche et une chevi-

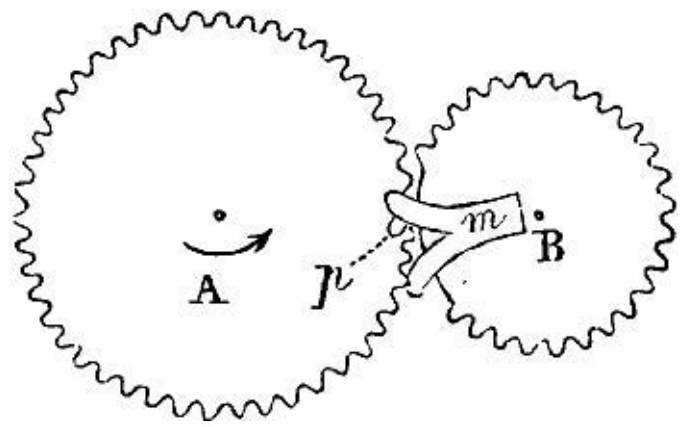


Fig. 226

ville comme précédemment, pour assurer la reprise des dents toujours au même point.

La meilleure disposition de ce genre est celle représentée dans la figure 227. La partie mn de la seconde roue est formée par un arc de cercle décrit du centre de la roue menante, et la circonférence de celle-ci est formée d'un cylindre auquel les dents sont intérieures dans la partie dentée qn. La partie concave mn rencontrant le cylindre ne peut tourner jusqu'au moment précis où les

dents peuvent se mettre en contact. Cet effet est produit par une cheville adaptée à la roue menante, qui rencontre, au moment convenable, une partie saillante appartenant à la roue conductrice,

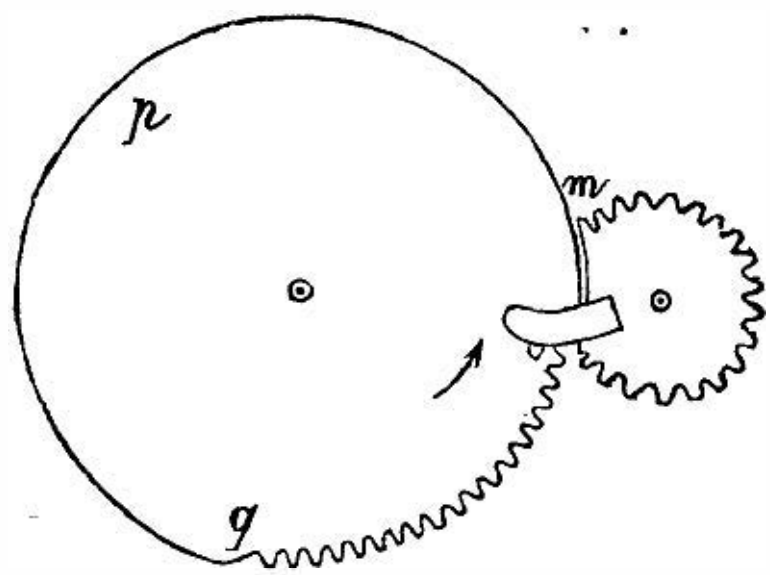


Fig. 227.

disposition qui offre l'avantage de vaincre l'inertie avant que les dents entrent en contact, de reporter ses effets sur un fuseau et une dent de résistance suffisante.

ORGANES AGISSANT A L'AIDE D'INTERMÉDIAIRES RIGIDES.

257. Une bielle servant à la communication du mouvement entre deux axes parallèles engendre un mouvement dans un rapport de vitesse variable avec celle du mouvement initial, sauf le cas déjà examiné où la bielle, de longueur égale à la distance des centres, et restant parallèle à cette ligne, est assemblée à deux bras de levier égaux.

En effet, soient AB, CP (fig. 228) deux axes parallèles placés bout à bout, AP et CQ deux leviers reliés par une bielle PQ, montés à l'extrémité des deux axes. An et Cn étant les perpendiculaires menées du centre du mouvement sur la bielle, on aura (art. 152) :

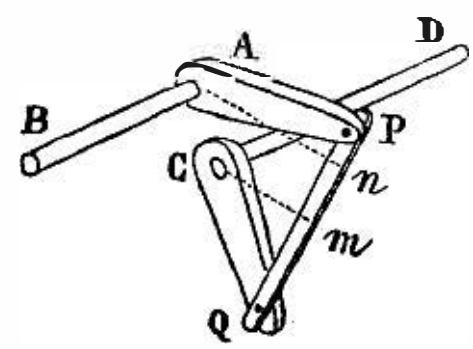


Fig. 228.

$$\frac{\text{Vitesse angulaire de AP}}{\text{Vitesse angulaire de CQ}} = \frac{Cm}{An},$$

rapport variable en chaque instant, comme la distance de la bielle aux axes de rotation et son inclinaison.

258. Dans un système de ce genre, la rotation continue de l'un des bras peut communiquer au second bras soit le mouvement circulaire continu, soit le mouvement alternatif que nous étudierons plus loin. L'un ou l'autre de ces mouvements prend naissance suivant les proportions des quatre côtés de la figure formée par la distance des centres, la bielle et les manivelles.

Nous renverrons pour cette discussion au cas du mouvement circulaire alternatif engendré presque toujours à l'aide de la bielle. Nous discuterons alors tous les cas et mouvements possibles, et les limites dans lesquelles se produit la transmission du mouvement circulaire continu.

Je donnerai toutefois ici les deux cas suivants :

259. 1° Nous avons vu que, dans le cas de deux manivelles égales réunies par une bielle de longueur égale à la distance des axes, les vitesses sont les mêmes quand la bielle reste toujours

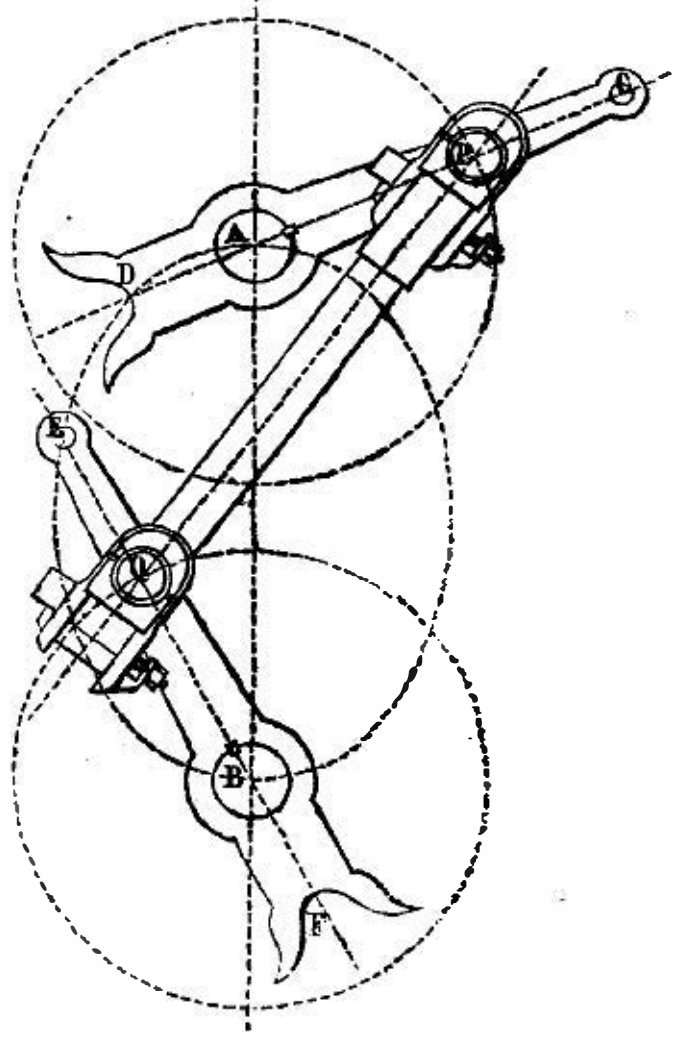


Fig. 229.

parallèle à la ligne des centres, et qu'au contraire elles sont dans un rapport variable lorsque, les manivelles tournant en sens inverse, la bielle vient rencontrer la ligne des centres en des

points également variables. Établissons la loi de ce mouvement.

AP, BQ étant ces deux manivelles, PQ la bielle, nous avons vu que, lorsqu'elle arrive sur la ligne des centres, il faut une disposition qui assure la continuation du mouvement dans le sens voulu, car deux mouvements de sens opposé sont également possibles. Le professeur Reulcaux (de Zurich), qui a fort bien analysé cet organe de transmission, propose, pour assurer la rotation en sens contraire des deux manivelles, de terminer une extrémité de chacune d'elles par un fuseau cylindrique, et le prolongement de l'autre extrémité par un creux, de telle sorte qu'il en résulte une dent d'engrenage en prise seulement lorsque la bielle est parallèle à la ligne des centres, condition qui fixe la longueur de la somme des deux appendices.

Le rapport des vitesses dans cet organe est exactement celui qui résulterait de l'emploi de deux roues elliptiques égales, disposées comme article 169, l'ellipse primitive ayant pour grand axe la distance des centres, et pour excentricité la moitié de la longueur des manivelles.

En effet, nous reportant à la figure 156 de l'article cité, on voit que, SH étant la distance des centres, foyers des deux ellipses, $Sh = sH$, à cause de la symétrie parfaite autour de la tangente qui résulte de la nature de l'ellipse, c'est-à-dire que la longueur de la ligne qui joint les foyers mobiles est toujours égale à la distance des centres, et par suite constante. Si donc cette ligne devient une bielle, et si l'on établit deux manivelles de longueur égale à l'écartement des foyers, on aura nécessairement le même mouvement qu'avec deux ellipses, dont le grand axe serait égal à la distance des centres, et l'excentricité $e = \sqrt{a^2 - b^2}$, a et b étant les deux demi-grands axes, égale à la moitié de la longueur des manivelles.

La variation des vitesses s'étendra donc, comme dans le cas cité, de $a + e$ à $a - e$, et inversement, donnant un maximum et un minimum, et le rapport s'obtiendra en chaque instant avec facilité, en relevant le point d'intersection sur la ligne des centres, ou sur la bielle, dont les deux parties seront toujours les

deux rayons vecteurs menés des deux foyers au point commun aux deux ellipses (fig. 156). La variation de vitesse dans cet organe montre qu'on ne saurait employer une bielle coupant la ligne des centres pour rendre solidaires deux mouvements de rotation uniformes, comme on l'a à tort essayé quelquefois.

Quant à la forme à donner aux fourchettes, comme le mouvement relatif des manivelles est celui de rayons de roues elliptiques, elles devront être formées d'arcs d'épicycloïdes elliptiques, obtenus par le roulement d'une des ellipses sur l'autre, pour les deux points qui répondent au maximum et au minimum. Comme dans ces deux points les rayons vecteurs sont normaux aux éléments de la courbe, il y aura peu de différence, pour une seule dent, avec un petit arc d'épicycloïde circulaire.

260. 2° Si, au lieu de réunir par des axes et des tourillons les deux extrémités de la bielle, on rendait un des assemblages mobile, on aurait un système pouvant être disposé de manière que le rapport des vitesses fût astreint à suivre une loi donnée, mais dans lequel le frottement de glissement serait trop grand pour être adopté pour la transmission de forces un peu considérables.

Un mode simple de disposition de ce genre consiste dans l'emploi d'une cheville adaptée à une manivelle et d'une rainure adaptée à l'autre.

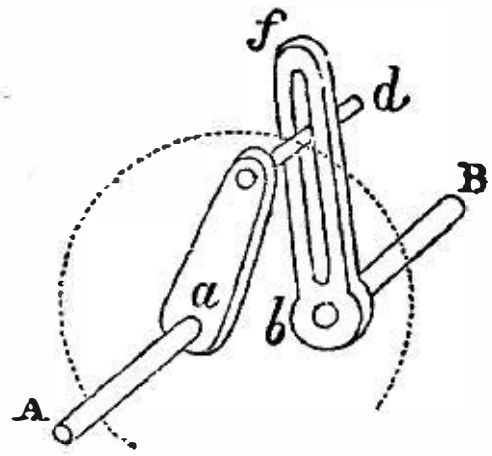


Fig. 230.

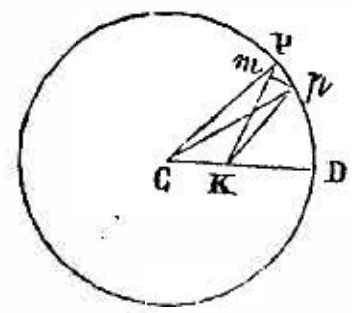


Fig. 231.

Soient A a, B b (fig. 230), deux axes parallèles en direction, mais dont les extrémités sont opposées l'une à l'autre.

A a porte un bras auquel est assemblée une cheville d, qui entre dans une longue rainure traversant un bras adapté à l'extrémité de B b. Quand l'un des axes tourne, il communique sa

rotation à l'autre, et le rapport des vitesses change sans cesse avec le changement de la distance de la cheville d à l'axe B b, avec le bras de longueur variable de la seconde manivelle.

Soit C le centre de rotation du bras à cheville (fig. 231), K le centre de rotation du bras à rainure, P la cheville, R le rayon constant du cercle que la cheville décrit autour de C, r le rayon du cercle K; P se mouvant d'un petit angle de P en p, traçons pm perpendiculaire à PK.

$$\frac{\text{La vitesse angulaire de la cheville}}{\text{La vitesse angulaire de la rainure}} = \frac{\frac{Pp}{PC}}{\frac{pm}{pK}} = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{\cos. CPK}{r}},$$

car $pm = Pp \cos. PpM = Pp \cos. CPK$.

Si donc CP tourne d'une vitesse uniforme, la vitesse de PK varie comme $\frac{\cos. CPK}{r}$. Si CK est petit par rapport à R, on peut poser $\cos. CPK = 1$; alors les centres de mouvement étant proches, le rapport des vitesses se trouve voisin de $\frac{r}{R}$.

CK étant l'excentricité e, les plus grandes et plus petites longueurs seront $R = r + e$ et $R = r - e$, le maximum et le minimum de vitesse correspondront aux rapports $\frac{R}{R-e}, \frac{R}{R+e}$.

On peut calculer directement la valeur de l'angle CPK, qui correspond à une position déterminée de CP. En effet :

Posons $PCD = \theta$, $PKD = \beta$, $CK = e$, on a :

$$R \sin. \theta = (R \cos. \theta - e) \text{ tang. } \beta \text{ ou tang. } \beta = \frac{R \sin. \theta}{R \cos. \theta - e}.$$

En altérant la direction de la rainure, ou la faisant courbe, on peut obtenir d'autres rapports de vitesse qui varient évidemment avec la forme de la rainure.

261. Ce n'est pas le plus souvent pour obtenir une loi variable de mouvement en raison des positions de la bielle qu'on emploie ce genre d'organes, c'est au contraire dans les cas où, les variations de vitesse n'étant pas nuisibles, on peut profiter sans inconvénient de l'avantage de la bielle de transmettre le mouvement circulaire, en ne consommant pour le frottement qu'une portion minime du travail moteur.