eine Parallele zur Normalen n_{34} der Scheibe 2 und Rolle 3 in deren Berührungspunkte legt; diese schneidet den Strahl 14—34 im Endpunkte V^4_{34} des gesuchten Vektors. Nunmehr findet sich (ebenfalls wie in Fig. 97) die Geschwindigkeit V^4_B des Berührungspunktes B des Hüllkurvenpaares, wenn man letzteren als Punkt des Gliedes 4 auffaßt, indem man durch den Endpunkt V^4_{34} eine Parallele zu 34—B legt; diese trifft die Gerade 14—B im gesuchten Endpunkte V^4_B. Die Geschwindigkeit V^5_B des Punktes B als Punkt des Gliedes 5 ergibt die Parallele zur Normalen n_{45} des Hüllkurvenpaares c_4, c_5; sie schneidet den Strahl 15—B im Endpunkt V^5_B. Nunmehr erhält man die senkrechte Geschwindigkeit V^5_{67} des Punktes von 5, der sich augenblicklich mit 67 deckt, durch die Parallele $V^5_B - V^5_{67}$ zu B—67, die auf dem Strahl 15 — 67 dem Vektor V^5_{67} abschneidet, und schließlich durch die Senkrechte zu V^5_{67} den Vektor V^7_{67}, d. i. die senkrechte Geschwindigkeit eines Punktes der Ventilstange 7. Durch Wiederholung dieser Konstruktion für eine genügende Anzahl von Lagen der Scheibe 2 erhält man den gesuchten V-Plan ε_{67} des Punktes 67 als geometrischen Ort der Endpunkte V^7_{67}.

Achtes Kapitel.

Grenz-, Verzweigungs- und Wechsellagen.

40. Sonderlagen der Kettenglieder.

Innerhalb der unendlich vielen Lagen, die die Kettenglieder bei ihren gegenseitigen Bewegungen einnehmen, gibt es im allgemeinen immer einzelne Lagen, die sich durch besondere Eigenschaften auszeichnen; wir wollen sie Sonderlagen nennen. Die Eigenschaften, die diese Sonderlagen kennzeichnen, sind zweierlei Art. Entweder sind sie unabhängig von den Abmessungen der Kettenglieder, treten also im allgemeinen auf, oder aber nicht, in welch letzterem Falle die Abmessungen bestimmte Bedingungen zu erfüllen haben, damit eine Sonderlage der letzteren Art auftritt. Es sollen diese Vorkommnisse zunächst an dem Beispiel des Gelenkviereckes erläutert werden.

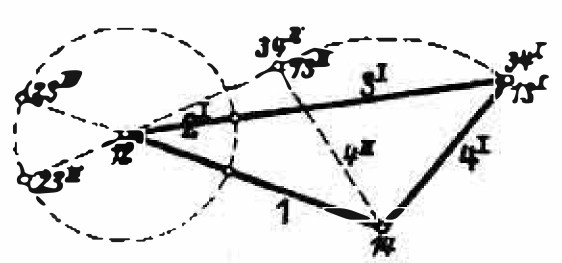

Fig. 123.

Es sei das in Fig. 123 dargestellte Gelenkviereck eine sogenannte Schwingkurbelkette, d. h. die Abmessungen seien so gewählt, daß die Kurbel 2 gegen das ruhend gedachte Glied 1 einen vollen Umlauf vollziehen kann. Dann schwingt die Kurbel 4 zwischen zwei Lagen

4^I und 4^{II} hin und her, die sich zeichnerisch leicht ermitteln lassen; sie mögen Grenzlagen genannt werden.

Für diese beiden Lagen ist kennzeichnend, daß die drei Gelenkpunkte 12, 23 und 34 in eine Gerade fallen, also einerseits 23^I und 34^I, und andererseits 23^{II} und 34^{II} mit 12 in einer Geraden liegen. Aus diesen besonderen Lagen der Gelenkpunkte folgt, daß der Pol 13 dann mit 23^I, bzw. 34^{II} zusammenfällt, während der Pol 24 mit 12 in Deckung sich befindet.

Aus letzterem Umstand läßt sich weiter ableiten, daß die Winkelgeschwindigkeit ω_4^1 des Gliedes 4 gegen das ruhende Glied 1 zu Null wird, wenn dieses Glied sich in einer Grenzlage befindet. Das ersieht man auch ohne weiteres aus dem Nullwerden der Bahngeschwindigkeit des Gelenkpunktes 34 in den beiden Umkehrpunkten 34^I und 34^{II} seiner Bewegung, da ja der andere Gelenkpunkt 14 ruht. Es lassen sich sonach die beiden Grenzlagen des Gliedes 4 auch auffassen als Lagen, für die die Winkelgeschwindigkeit gegen das Glied 1 zu Null wird.

Die erwähnten Grenzlagen erhalten eine besondere Bedeutung für die aus der angeführten Schwingkurbelkette hervorgehenden Getriebe, und zwar dann, wenn 1 das ruhende und 4 das treibende Glied ist. In diesem Falle kann die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel 2 in jeder der beiden Lagen *I* und *II* alle möglichen Werte haben, also auch den Wert Null und dann kann diese Kurbel sich aus einer solchen Lage entweder in dem einen oder anderen Sinne weiter drehen, d. h. der Drehsinn der Kurbel 2 wird dann unbestimmt. In Wirklichkeit verhindern die bewegten Massen im allgemeinen diese Unbestimmtheit infolge ihrer Trägheit; doch könnte durch die Mitwirkung von Kräften in besonderen Fällen doch eine solche eintreten.

Eine weitere Eigentümlichkeit des behandelten Getriebes zeigt sich, falls auf das treibende Glied 4 Arbeit verrichtende Kräfte wirken. Während in einer beliebigen gegenseitigen Lage der Glieder diese Kräfte eine Änderung des Geschwindigkeitszustandes in dem Getriebe herbeiführen, bzw. das Getriebe in Bewegung versetzen, falls es in Ruhe war, ist das in jeder der beiden Grenzlagen nicht der Fall, weil die Arbeit der Kräfte bei einer unendlich kleinen Bewegung des Gliedes 4 aus einer Grenzlage Null sein muß. Man nennt deshalb die Grenzlagen in Getrieben auch Todlagen.

Nicht in allen Gelenkvierecken treten Grenzlagen auf, wie z. B. in den Doppelkurbelgetrieben und deren Sonderfällen, dem Parallel- und dem Antiparallelkurbelgetriebe (s. Fig. 108 u. 109). Dafür kann aber eine Sonderlage der Glieder in gewissen Gelenkvierecken nicht allgemeiner Art eintreten, wenn die Abmessungen der Glieder gewisse Bedingungen erfüllen. Das ist z. B. der Fall bei dem **durchschlagenden Gelenkviereck**, das schon in Nr. 34 (S. 71, Fig. 106) behandelt wurde. In diesem treten keine Grenzlagen auf, wohl aber hat es Sonderlagen, wenn die vier Gelenkpunkte in eine Gerade fallen, was nur möglich ist, wenn die Summe der Gliedlängen zweier zusammenstoßender Glieder gleich der Summe der beiden andern Gliedlängen ist. Befindet sich die Kette in einer solchen Lage (s. Fig. 124), so erkennt man leicht, daß die unmittel-

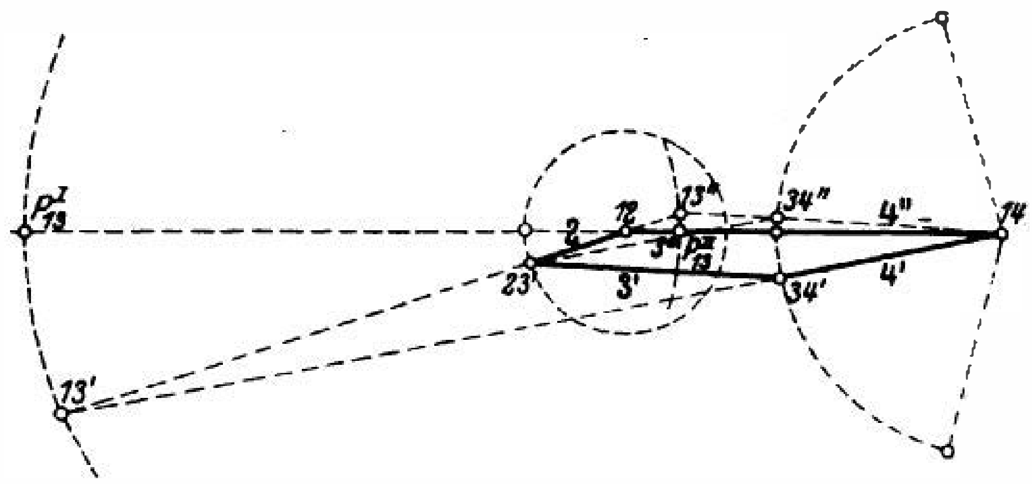

Fig. 124.

bare Bestimmung der Pole 13 und 24 als Schnittpunkte von Polgeraden hier versagt. Aber es ergibt sich weiter, daß einer dieser Lage *I* benachbarten Lage der Kurbel 2, die durch die Lage 23′ des Gelenkpunktes 23 bestimmt ist, sich zwei verschiedene Lagen 34′ und 34″ des Punktes 34 zuordnen, und somit zwei verschiedene Lagen des Gelenkviereckes. In dem einen Falle ist das Gelenkviereck ein offenes mit den Polen 13′ und 24′, und im zweiten Falle ein gekreuztes mit den Polen 13″ und 24″. Aus der Verschiedenheit der Lage der Pole 13′ und 13″ erkennt man, daß die ruhende Polkurve, wenn man sie in der früher (S. 42) erwähnten Weise aufzeichnet, die Polgerade 12 — 14 in zwei verschiedenen Punkten (13)′ und (13)″ schneiden muß und folglich die bewegliche Polkurve des Gliedes 3 die erstere in der Lage *I* des Gelenkviereckes in **zwei** Punkten berührt. Je nachdem nun der Berührungspunkt beider Kurven (der Pol 13) seine Bewegung auf demselben Zweige der ruhenden Polkurve fortsetzt, oder nicht, ist die Bewegung der Koppel 3 stetig oder unstetig, d. h. bleibt der Pol in (13)′ oder springt nach (13)″ über. Entsprechend den beiden Zweigen der ruhenden Polkurve kann sich sonach auch die Bewegung der Glieder des Gelenkviereckes verzweigen, weshalb man eine solche Lage eine **Verzweigungslage** nennt.

Kennzeichnend für eine solche Lage ist demnach, daß die Polgeraden, deren Schnittpunkt im allgemeinen Falle den Pol eindeutig bestimmt, in eine Gerade fallen, also kurz gesagt, das Zusammenfallen von Polgeraden.

Eine noch weitergehende Besonderheit tritt bei dem durchschlagenden Gelenkviereck ein, wenn es gleichschenklig ist, d. h. wenn zwei der in einem Gelenkpunkt zusammenstoßenden Glieder gleiche Länge haben, wie z. B. 1 und 2 in Fig. 124a. Fällt nämlich 2 mit 1 zusammen, so muß dies auch mit 3 und 4 der Fall sein, und weil dann die beiden Gelenkpunkte 14 und 23' dieselbe Drehachse haben, so können sich die Glieder 3 und 4 aus jener Lage so bewegen, ols ob sie ein einziges starres Glied wären. Das Gelenkviereck geht sonach in ein zwangläufiges Elementenpaar über, indem die Zahl der sich gegeneinander bewegenden Glieder von 4 auf 2 sinkt, also die Gliederzahl der Kette in solcher Lage wechselt. Einer derartigen Lage wird deshalb eine Wechsellage genannt.

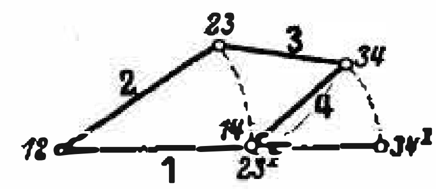

Fig. 124a.

Die genannten drei Sonderlagen, nämlich die Grenz-, Verzweigungs- und Wechsellagen sollen im folgenden etwas allgemeiner behandelt werden.

41. Die Grenzlagen.

Bezüglich der Bahnkurven der Punkte eines Kettengliedes sind nur zwei Fälle möglich. Entweder beschreibt der Punkt eine in sich zurücklaufende, d. i. geschlossene Bahnkurve, oder aber bewegt er sieh auf einem Teil einer Kurve hin und zurück. Im letzteren Falle hat die Bewegung des Punktes das Kennzeichen einer schwingenden Bewegung und dementsprechend Umkehrpunkte, in denen der Punkt momentan zur Ruhe kommt. Befinden sich zwei Punkte eines Gliedes gleichzeitig in Umkehrpunkten ihrer Bahnen, so ist das Glied in einer Grenzlage, denn durch die Bewegung zweier Punkte ist die komplane Bewegung einer starren Ebene und demnach des Kettengliedes völlig bestimmt. Da zwei Punkte des Gliedes die Bahngeschwindigkeit Null haben sollen, so folgt daraus, daß die Winkelgeschwindigkeit des Gliedes in einer Grenzlage Null sein muß. Es lassen sich daher Grenzlagen eines Gliedes gegen ein anderes Glied der Kette als solche definieren, in denen die Winkelgeschwindigkeit des Gliedes gegen jenes andere Glied momentan gleich Null ist. Das tritt nun im allgemeinen nur ein, wenn zwei Pole der Relativbewegungen dreier Glieder zusammenfallen, wie die folgende Betrachtung lehrt.

Es seien P_{hi}, P_{hk}, P_{ik} die Pole, ω_i^h, ω_k^h, ω_k^i die Winkelgeschwindigkeiten der Relativbewegungen dreier komplaner Ebenen, so besteht zufolge Nr. 33 (S. 56) die Beziehung (s. Fig. 125)

Fig 125.

$$\overline{P_{hi} P_{ik}} \cdot \omega_i^h = \overline{P_{hk} P_{ik}} \cdot \omega_k^h,$$

vermittels deren entweder die Lage des Poles P_{ik} auf der Polgeraden bestimmt werden kann, wenn P_{hi} und P_{hk} gegeben sind, oder aber die Winkelgeschwindigkeit ω_k^h und dann auch $\omega_k^i = \omega_i^h + \omega_k^h$, falls P_{ik} bekannt ist. Aus vorstehender Bezeichnung folgt nun:

Fällt P_{ik} mit P_{hk} zusammen, ist also $\overline{P_{hk} P_{ik}} = 0$, so wird notwendig

$$\omega_i^h = 0,$$

d. h. die Ebene G_i hat gegen G_h eine Grenzlage. Fällt dagegen P_{ik} mit P_{hi} zusammen, ist sonach $\overline{P_{hi} P_{ik}} = 0$, so wird

$$\omega_k^h = 0$$

sein müssen, und dann befindet sich die Ebene G_k gegen G_h in einer Grenzlage.

Hieraus geht hervor, daß das Zusammenfallen von zweien der drei Pole der Relativbewegungen dreier komplaner Ebenen im allgemeinen als das Kennzeichen der Grenzlagen angesehen werden kann. Auf die Glieder einer zwangläufigen Kette angewandt erhalten wir hieraus den Satz: Fällt der Pol der Relativbewegung zweier Glieder zusammen mit einem der Pole dieser Glieder gegen ein drittes Kettenglied, so befindet sich eines der ersteren gegen das dritte in einer Grenzlage.

An diesem Satze ändert sich nichts, wenn einer der drei Pole dauernd im Unendlichen liegt. Es ist nur zu beachten, daß das Zusammenfallen eines Poles mit einem unendlich fernen Pole nur eintreten kann, wenn ersterer in derselben Richtung ins Unendliche rückt, in der sich der andere im Unendlichen befindet.

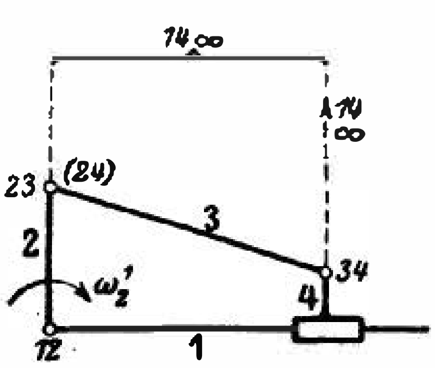

Fig. 126.

Ein Beispiel soll das Gesagte erläutern. In der beistehend skizzierten Schubkurbelkette (s. Fig. 126) ist die Lage der Glieder so gewählt, daß der Pol 13 des Gliedes 3 gegen 1 in das Unendliche fällt. In dieser Lage fällt der Pol 24 momentan mit dem Gelenkpunkt 23 zusammen und der Pol 13 mit dem dauernd im Unendlichen liegenden Pol 14_∞ des Gliedes 4 gegen 1, weil die beiden letzteren Glieder durch ein Schiebepaar verbunden sind. Die Richtung, in der 13 ins Unendliche rückt, ist dann die senkrecht zur Schubrichtung, also die, in der 14_∞ liegt. Nach dem Vorhergehenden ist daher

$$\omega_3^1 = 0,$$

d. h. die Glieder 3 und 4 bewegen sich momentan wie ein einziges starres Glied, das gegen 1 eine Schiebung ausführt; ferner befindet sich das Glied 3 gegen 4 in einer Grenzlage, wie man auch unmittelbar leicht erkennt. Dasselbe Ergebnis schließt man nach dem Vorhergehenden aus dem Umstande, daß in der gezeichneten Lage der Glieder der Pol 24 mit 23 zusammenfällt.

Zugleich erweist das behandelte Beispiel, daß die auf S. 59 gezogene Folgerung: Fallen zwei der drei Pole dreier komplaner Ebenen ins Unendliche, so ist das auch mit dem dritten der Fall, eine Ausnahme erleidet, sobald die unendlich fernen Pole zusammenfallen, bzw. in derselben Richtung im Unendlichen liegen. Denn dann bleibt ein Pol (hier 34) und somit auch die Polgerade im Endlichen, während im allgemeinen die letztere zur unendlich fernen Geraden wird, auf der die Pole getrennt liegen.

Der Umstand, daß die Grenzlagen von Kettengliedern durch das Zusammenfallen entsprechender Pole gekennzeichnet sind, ist von besonderem Vorteil für die bezüglichen Untersuchungen an Getrieben, indem man als zwei der drei in Frage kommenden Glieder das ruhende und das treibende Glied wählt, während als drittes jedes übrige in Frage kommen kann. Das ist insofern nicht unwesentlich, als sich hierbei nicht nur für das getriebene, sondern auch für das treibende Glied Grenzlagen ergeben können, die das Bewegungsgebiet des letzteren und damit des ganzen Getriebes beschränken.

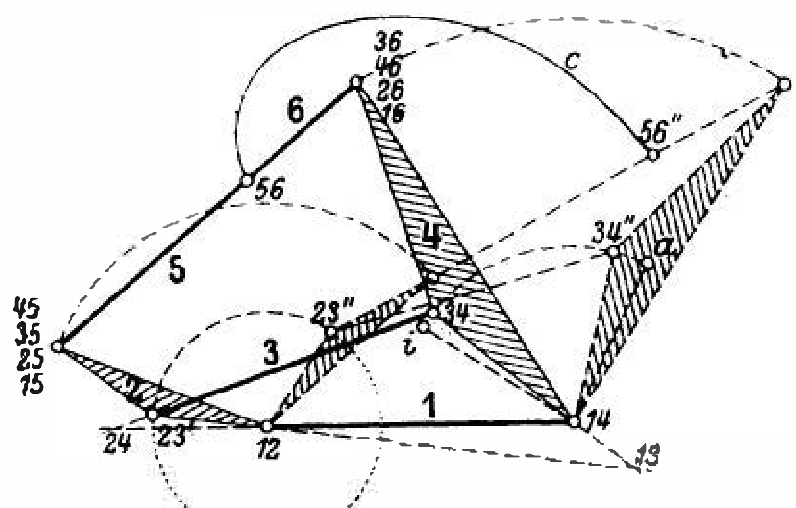

Fig. 127.

So wird z.B. in der durch Fig. 127 dargestellten sechsgliedrigen Kette durch die Glieder 5 und 6 das Bewegungsgebiet der Schwingkurbelkette, die aus den Gliedern 1, 2, 3 und 4 besteht, ganz erheblich eingeschränkt. Würden die Glieder 5 und 6 größere Längen haben, so könnte die Kurbel 2 einen vollen Umlauf vollziehen und dementsprechend die Schwinge 4 zwischen den mit *i* und *a* bezeichneten Lagen pendeln. Bei den gewählten Maßen dagegen kann die Kurbel 2 nur zwischen den beiden Lagen schwingen, die in der Figur mit $23'$, bzw. $23''$ bezeichnet sind, und demgemäß 4 zwischen $34'$ und $34''$, weil in diesen beiden Lagen die Glieder 5 und 6 in eine Gerade fallen, bzw. die Gelenkpunkte 25 und 46 sich in einem Maximum ihrer Entfernung befinden. Und es leuchtet ohne weiteres ein, daß man das Bewegungsgebiet der Kettenglieder auf ein unendlich kleines beschränken könnte, wenn man die Gelenkpunkte 25 und 46 im Minimum ihrer Entfernung durch zwei Glieder 5 und 6 gelenkig verbinden würde, deren Längen zusammen jenem Minimum gleich sind.

Die in Fig. 127 dargestellte Kette hat in ihren beiden Grenzlagen das Besondere, daß mit Ausnahme von den Polen 13 und 24 alle übrigen Pole mit zwei Gelenkpunkten zusammenfallen, und zwar 15, 35 und 45 mit 25, 16, 26 und 36 mit 46. Hieraus geht hervor, daß die Winkelgeschwindigkeiten der Relativbewegungen der 4 Glieder des Gelenkviereckes, nämlich ω_2^1, ω_3^1, ω_4^1, ω_3^2, ω_4^2 und ω_4^3, Null sein müssen, also letzteres sich momentan wie ein starres Gebilde bewegt.

42. Verzweigungs- und Wechsellagen.

Wie schon bei dem durchschlagenden Gelenkviereck in Nr. 37 hervorgehoben wurde, treten Verzweigungslagen in kinematischen Ketten allgemeiner Art, d. h. mit willkürlichen Abmessungen der Glieder nicht auf, sondern nur in solchen, deren Abmessungen bestimmte Bedingungen erfüllen. Kennzeichnend für die Verzweigungs-

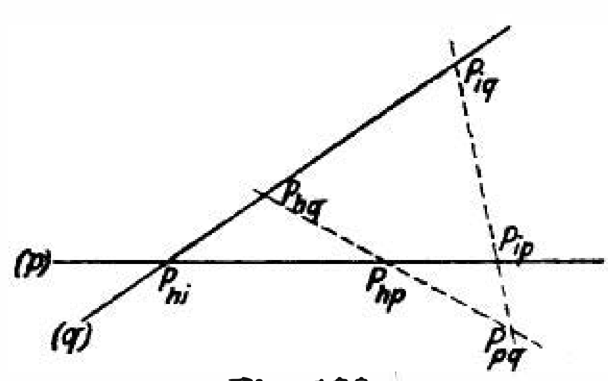

Fig. 128.

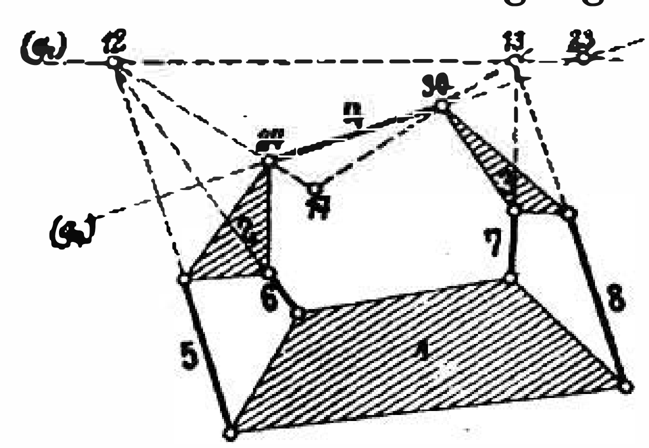

Fig. 129a.

lagen ist, daß die Polgeraden zweier Ebenen gegen zwei dritte Ebenen zusammenfallen, ohne daß entsprechende Pole zusammenfallen. Den Ebenen E_h, E_i und E_p sei die Polgerade (p), den Ebenen E_h, E_i und E_q die Polgerade (q) zugeordnet (s. Fig. 128), dann schneiden sich die beiden Polgeraden im allgemeinen nach dem Schema

$$\begin{matrix} hp - ip \\ hq - iq \end{matrix} > hi$$

in dem Pol P_{hi}, der damit eindeutig bestimmt wird. Fallen beide Geraden in eine zusammen, so läßt sich P_{hi} auf diesem Wege nicht mehr bestimmen und es bedarf der Berücksichtigung der Krümmugsverhältnisse der Bahnen, um die Ermittlung der Lage des Poles P_{hi}

zu ermöglichen. Um ein Beispiel für ein derartiges Vorkommnis anzuführen, werde die achtgliedrige Gelenkkette Fig. 23c benutzt, für welche die Bestimmung der Pole für die Relativbewegungen der Glieder 1, 2, 3, und 4 in Fig. 129a durchgeführt ist. Die beiden Polgeraden (g_1) und (g_4) schneiden sich im Pol 23; ferner ist die Lage des Poles 14 nach dem Schema

$$\left.\begin{matrix} 12 - 24 \\ 13 - 34 \end{matrix}\right> 14$$

eindeutig bestimmt. Hat aber die Kette entsprechende Abmessungen, so kann der in Fig. 129b dargestellte Fall eintreten, daß die Geraden (g_1) und (g_4) zusammenfallen, und dann wird nicht nur die Lage des Poles 23, sondern auch die von 14 unbestimmt. Es läßt sich nun nachweisen, daß in diesem Falle ähnlich, wie bei dem durchschlagenden Gelenkviereck für jeden der beiden Pole sich zwei verschiedene Lagen ergeben, und daß die Bewegung dann eine Unstetigkeit erleidet, wenn der Pol aus der einen Lage in die andere überspringt. Für das Glied 4 z. B. bedeutet das, daß der Pol 14 seine Lage sprungweise wechselt, und die Drehung des Gliedes 4 gegen 1 in der Verzweigungslage plötzlich in eine ganz andere übergehen kann. Aus diesem Grunde müssen Verzweigungsanlagen in Getrieben vermieden werden, und das ist durch entsprechende Abänderung einzelner Abmessungen leicht zu erreichen.

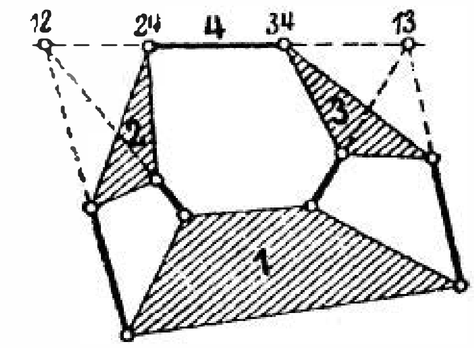

Fig. 129b.

In noch höherem Maße gilt letzteres von den Wechsellagen, wie sie in dem Falle des gleichschenkligen durchschlagenden Gelenkviereckes gekennzeichnet wurden. Man hat ja zur Vermeidung des Übelstandes, daß die Zahl der bewegten Glieder in einer Wechsellage sich ändert, verschiedene Hilfsmittel, wie z. B. den Überschluß der Kette durch niedere oder höhere Elementenpaare; indes dürfte es in den Fällen der Anwendung immer möglich sein, Ketten zu finden, die die geforderten Bewegungsbedingungen erfüllen, ohne eine Wechsellage aufzuweisen.

Treten in einer Kette mehrere Wechsellagen auf, so kann es sogar vorkommen, daß bei dem Zusammenfallen solcher Lagen die Kette in einer derartigen mehrfachen Wechsellage ihre Zwangläufigkeit verliert. Ein Beispiel zeigt Fig. 130. Die sechsgliedrige Kette kann in der Wechsellage in eine offene dreigliedrige Gelenkkette übergehen, in der die Glieder 1 und 2, 3 und 4, 5 und

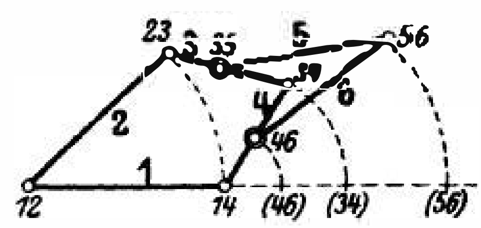

Fig. 130.