den geometrischen Beziehungen zwischen den Krümmungen der Bahnkurven folgt.

Sechstes Kapitel.

Die Relativbewegungen von drei und mehr komplanen Ebenen.

33. Die Relativbewegungen dreier Ebenen.

Für die Relativbewegungen dreier Ebenen besteht der folgende grundlegende

Satz: Die drei Pole der Relativbewegungen dreier komplaner starrer Ebenen liegen auf einer Geraden.

Es seien die Elementarbewegungen der Ebene E_2 gegen E_1 und von E_3 gegen E_1 bekannt, folglich auch die Lagen der entsprechenden Pole P_{21} und P_{31} (s. Fig. 91). Um die Relativbewegung von E_3 gegen E_2 zu finden, erteilen wir E_1 die entgegengesetzte Drehung um P_{21}, die E_2 gegen E_1 ausführt. Hierdurch kommt E_2 zur Ruhe und E_3 führt eine Drehung gegen E_2 aus, die sich aus den Drehungen von E_3 gegen E_1 um P_{31} und von E_1 gegen E_2 um P_{21} zusammensetzt. Da nun P_{31}, aufgefaßt als Punkt von E_3, nur die Bewegung mit E_1 gegen E_2 ausführt, so ist das Bahnelement dieses Punktes senkrecht zu dem Verbindungsstrahl mit dem Drehpunkte P_{21}, also auch senkrecht zu $\overline{P_{21}P_{31}}$. Die Relativbewegung von E_3 gegen E_2 ist nun eine Drehung um P_{32}, und da P_{31} als Punkt von E_3 sich bei dieser Bewegung senkrecht zu dem Verbindungsstrahl $\overline{P_{31}P_{32}}$ des Punktes P_{31} mit dem Pol P_{32} bewegt, so muß $\overline{P_{31}P_{32}}$ mit $\overline{P_{21}P_{31}}$ zusammenfallen, also P_{32} in der Geraden $P_{21}P_{31}$ liegen.

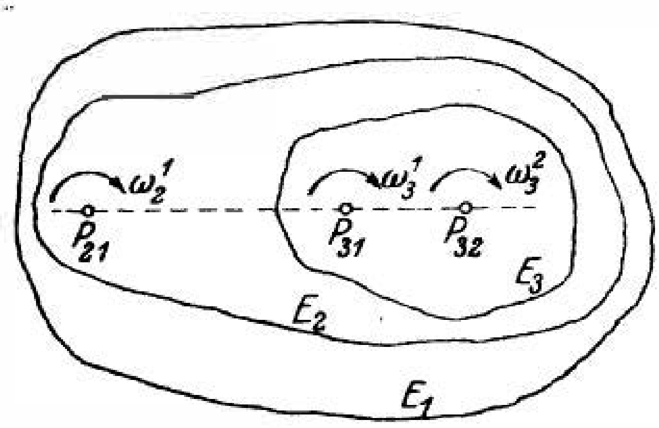

Fig. 91.

Kürzer läßt sich dieser Satz, wie folgt, beweisen. Der Pol P_{32} der Relativbewegung von E_3 gegen E_2 fällt zusammen mit dem Punkte der Ebene E_3, der sich momentan in relativer Ruhe gegen E_2 befindet. Nun sind bekanntlich zwei Punkte in relativer Ruhe, wenn sie gleiche und gleichgerichtete Geschwindigkeiten haben. Das ist aber bei zusammenfallenden Punkten der Ebenen E_2 und E_3 nur möglich, wenn diese Punkte in der Polgeraden $\overline{P_{21}P_{31}}$ liegen, denn dann sind die beiden Geschwindigkeiten senkrecht zu jener Geraden und folglich gleichgerichtet. Wählt man noch diese zusammenfallenden Punkte P_{32} so, daß ihre Geschwindigkeiten gleich groß werden, so ist damit die Lage des Poles P_{32} eindeutig bestimmt, und zugleich die Richtigkeit obigen Satzes erwiesen.

Die letzterwähnte Bestimmung der Lage des Poles P_{32} auf der Polgeraden läßt sich zeichnerisch leicht durchführen. Bezeichnet ω_2^1 die Winkelgeschwindigkeit der Drehung E_2 gegen E_1 um P_{21} mit dem in Fig. 92 durch den Pfeil angedeuteten Drehsinn, so wird die Geschwindigkeit v_2^1 eines beliebigen Punktes A_2 von E_2 auf der Polgeraden gleich $\overline{P_{21}A_2}\cdot\omega_2^1$ und senkrecht zu $\overline{P_{21}A_2}$; analog ist $v_3^1 = \overline{P_{31}A_3}\cdot\omega_3^1$ die Geschwindigkeit von dem beliebigen Punkte A_3 der Ebene E_3. Diese beiden Punktgeschwindigkeiten werden nach Größe und Richtung einander gleich nur für die beiden zusammenfallenden Punkte P_{32} der Ebenen E_2 und E_3 auf der Polgeraden, die der Bedingung

$$\overline{P_{21}P_{32}}\cdot\omega_2^1 = \overline{P_{31}P_{32}}\cdot\omega_3^1$$

genügen. Vorstehende Bedingungsgleichung in Verbindung mit der anderen

$$\overline{P_{21}P_{32}} - \overline{P_{31}P_{32}} = \overline{P_{21}P_{31}}$$

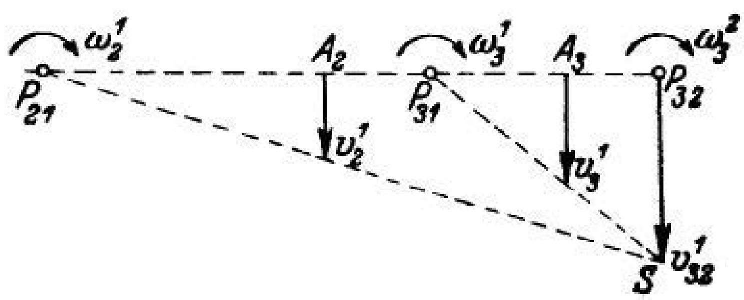

Fig. 92.

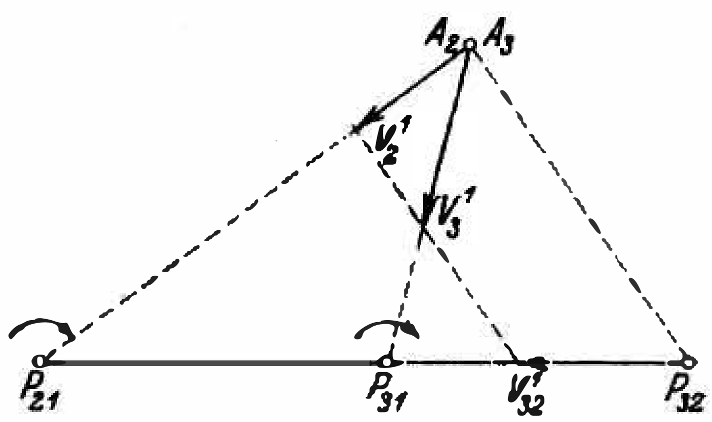

Fig. 93.

bestimmt die Lage von P_{32} eindeutig auf der Polgeraden. Zeichnerisch findet man P_{32}, indem man v_2 und v_3 durch Vektoren darstellt, die man in A_2, bzw. A_3 anträgt. Verbindet man die Endpunkte der Vektoren mit den bezüglichen Polen durch Gerade, so schneiden sich diese in einem Punkte S und dieser ist der Endpunkt des Vektors, der die gemeinsame Geschwindigkeit v_{32}^1 der in P_{32} zusammenfallenden Punkte der Ebenen E_2 und E_3 darstellt. Fällt man also von S ein Lot auf die Polgerade, so liegt im Fußpunkte desselben der gesuchte Pol P_{32}.

Einfacher und zugleich allgemeiner wird die Ermittlung von P_{32} durch Verwertung der senkrechten Geschwindigkeiten. Es sei A_2 (s. Fig. 93) ein beliebiger Punkt von E_2 und V_2^1 seine senkrechte Geschwindigkeit gegen E_1. Ferner sei A_3 der mit A_2 augenblicklich zusammenfallende Punkt von E_3 und V_3^1 seine senkrechte Geschwindigkeit. Nach dem Satze, daß die Endpunkte der senkrechten Geschwindigkeiten der Punkte einer Geraden auf einer Parallelen zu letzterer liegen, erhalten wir für jeden weiteren Punkt der Ebenen E_2, bzw. E_3 die senkrechte Geschwindigkeit durch das Ziehen entsprechender Parallelen. Sollen die beiden Geschwindigkeiten gleichgerichtet sein, so müssen die zusammenfallenden Punkte beider Ebenen auf $\overline{P_{21} P_{31}}$ liegen, und wenn sie gleiche Größe erhalten sollen, muß der Endpunkt der gemeinsamen senkrechten Geschwindigkeit V_{32}^1 auf der Geraden liegen, die die Endpunkte V_2^1 und V_3^1 der Vektoren verbindet. Zieht man sonach eine Parallele durch A_3 zu $\overline{V_2^1 V_3^1}$, so schneidet diese die Polgerade in dem gesuchten Pol P_{32}.

Aus den letzteren Darlegungen folgt leicht, daß die senkrechte Geschwindigkeit V_3^2 der Relativbewegung des Punktes A_3 gegen die Ebene E_2 sich unmittelbar findet, wenn man durch den Vektor-Endpunkt V_3^1 (s. Fig. 94) eine Parallele zu $\overline{P_{21} A_2}$ zieht; diese schneidet den Strahl $\overline{P_{32} A_3}$ im Endpunkte des Vektors V_3^2. Es ist also hiernach in Bestätigung eines bekannten Satzes über die Relativbewegungen V_3^2 die resultirende Geschwindigkeit aus V_3^1 und $- V_2^1 = V_1^2$, die als Diagonale des entsprechenden Parallelogrammes der Geschwindigkeiten gefunden wird.

Berücksichtigt man ferner, daß die Relativbewegung von E_1 gegen E_2 eine Drehung um denselben Pol P_{21} mit gleicher Winkelgeschwindigkeit, nur im entgegengesetzten Drehsinn ist, und folglich die Bahngeschwindigkeit v_1^2 des Punktes A_1 der Ebene E_1, der augenblicklich mit A_2 zusammenfällt, gleich aber entgegengesetzt gerichtet ist der Geschwindigkeit v_2^1 des Punktes A_2, so erkennt man nicht nur, daß die beiden entsprechenden senkrechten Geschwindigkeiten V_2^1 und V_1^2, in dem Punkte A_1 angetragen, nach entgegengesetzten Seiten in der Geraden $\overline{P_{21} A_1}$ liegen, sondern auch, daß die senkrechten Geschwindigkeiten der drei zusammenfallenden Punkte A_1, A_2 und A_3 in letzteren angetragen die Diagonalen eines Sechseckes bilden, dessen Gegenseiten paarweise parallel sind (s. Fig. 94). Dieses Geschwindigkeitssechseck hat für die zeichnerische Ermittlung der Geschwindigkeiten große Vorteile, denn es genügt demnach die Kenntnis einer der sechs Geschwindigkeiten, um alle übrigen zu finden, wenn nur die drei Pole der Relativbewegungen der drei Ebenen gegeben sind.

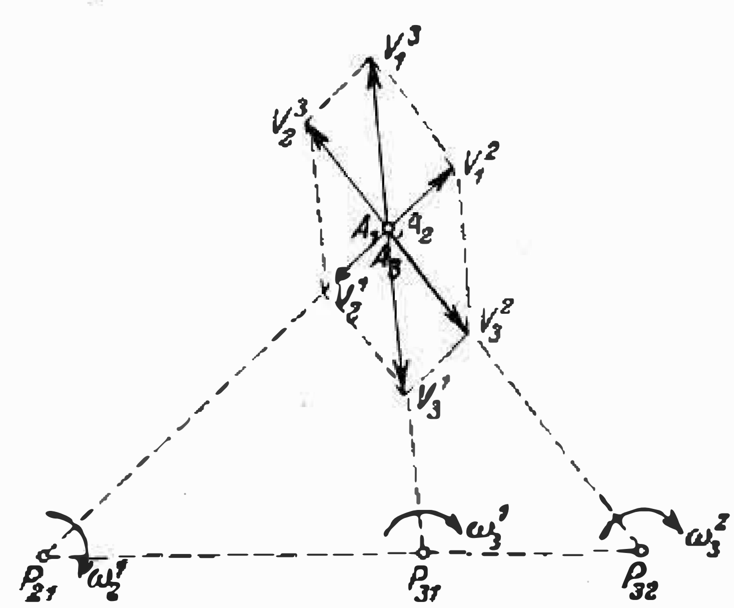

Fig. 94.

Die Winkelgeschwindigkeit der Relativbewegung von E_3 gegen E_2 läßt sich leicht aus der Beziehung ermitteln, daß der Winkel $\Delta\varphi_3^2$, um den sich die Ebene E_3 gegen E_2 in der verschwindend kleinen Zeit Δt dreht, gleich der Differenz der Drehwinkel $\Delta\varphi_3^1$ und $\Delta\varphi_2^1$ ist, wie Fig. 95 unmittelbar ersichtlich macht, also die Gleichung

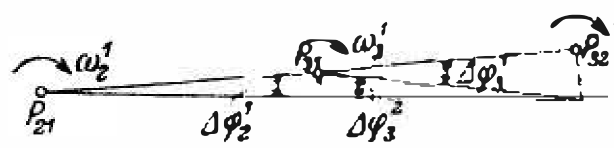

Fig. 95.

$$\Delta\varphi_3^2 = \Delta\varphi_3^1 - \Delta\varphi_2^1$$

besteht. Da allgemein der Drehwinkel

$$\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t$$

ist, so folgt aus voriger Beziehung sofort

$$\omega_3^2 = \omega_3^1 - \omega_2^1,$$

wobei angenommen wurde, daß die Drehungen um P_{21} und P_{31} gleichsinnig sind und $\omega_3^1 > \omega_2^1$ ist.

Haben die beiden Drehungen entgegengesetzten Drehsinn, so wird, wie leicht ersichtlich,

$$\omega_3^2 = \omega_3^1 + \omega_2^1;$$

es liegt dann der Pol P_{32} notwendig zwischen P_{21} und P_{31}, nicht aber, wie im vorgehenden Falle außerhalb der Strecke $\overline{P_{21}P_{31}}$.

Beide Relationen lassen sich durch die eine

$$\omega_3^2 = \omega_3^1 \mp \omega_2^1$$

oder auch

$$\omega_2^1 + \omega_3^2 + \omega_1^3 = 0$$

ersetzen; im letzteren Falle hat man nur dem Drehsinn durch entsprechende Vorzeichen Rechnung zu tragen.

In den weitaus meisten Fällen ist die Lage des Poles P_{32} nicht durch die Winkelgeschwindigkeiten bestimmt, sondern durch die Bedingung, daß die Bewegung von E_2 gegen E_1 auf E_3 durch ein Hüllkurvenpaar $(c_2\ c_3)$ übertragen wird, wie in Fig. 96 angedeutet ist. Dann liegt der Pol P_{32} in der Berührungsnormalen n_{23} des Hüllkurvenpaares,

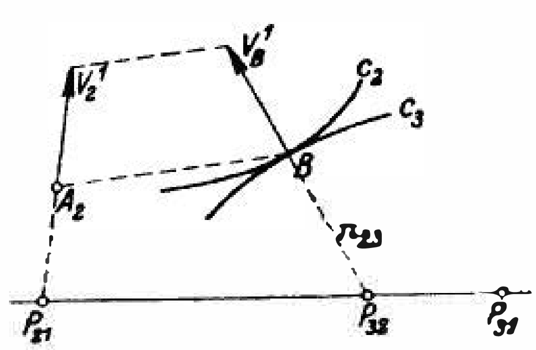

Fig. 96.

und, da er außerdem auf der Polgeraden sich befinden muß, im Schnittpunkt der letzteren mit n_{23}. Ist nun z. B. ω_2^1 gegeben, so finden sich ω_3^1 und ω_3^2 aus den beiden früheren Relationen

$$\overline{P_{21}P_{32}} \cdot \omega_2^1 = \overline{P_{31}P_{32}} \cdot \omega_3^1$$

und

$$\omega_3^2 = \omega_3^1 \mp \omega_2^1$$

zu

$$\omega_3^1 = \frac{\overline{P_{21}P_{32}}}{\overline{P_{31}P_{32}}} \cdot \omega_2^1$$

und

$$\omega_3^2 = \frac{\overline{P_{21}P_{31}}}{\overline{P_{31}P_{32}}} \cdot \omega_2^1 .$$

Einer besonderen Berücksichtigung bedarf der Fall, daß einer der drei Pole ins Unendliche rückt, weil dann die entsprechende Bewegung keine Drehung, sondern eine Schiebung wird. Wandert z. B. der Pol P_{32} ins Unendliche, was eintritt, wenn in Fig. 96 die Berührungsnormale n_{23} der Polgeraden parallel wird, so ergibt die letzte Relation mit $\overline{P_{31}P_{32}} = \infty$

$$\omega_3^2 = 0 ;$$

folglich wird hier

$$\omega_3^1 = \omega_2^1$$

und ein beliebiger Punkt A_3 der Ebene E_3 auf der Polgeraden erhält als Geschwindigkeit der Relativbewegung von E_3 gegen E_2

$$\overline{P_{21}A_3} \cdot \omega_2^1 + \overline{P_{31}A_3}\,\omega_3^1 = (\overline{P_{21}A_3} + \overline{P_{31}A_3})\,\omega_2^1 = \overline{P_{21}P_{31}} \cdot \omega_2^1 ,$$

also einen von der Lage des Punktes A_3 unabhängigen Wert. Daraus folgt, daß alle Punkte A_3 der Polgeraden die gleiche und auch gleichgerichtete (nämlich senkrecht zur Polgeraden) relative Geschwindigkeit besitzen, und das ist gleichbedeutend mit der Behauptung, daß die Ebene E_3 sich gegen E_2 senkrecht zur Polgeraden schiebend bewegt.

Zeichnerisch findet man die Schiebungsgeschwindigkeit v_3^2, bzw. V_3^2 in der genau gleichen Weise aus einer Punktgeschwindigkeit (V_2^1 oder V_3^1), wie dies in Fig. 94 dargestellt ist; nur wird V_3^2 hier parallel zur Polgeraden.

Fallen zwei der Polenins Unendliche, so ist das auch mit dem dritten der Fall, d. h. dann sind alle Relativbewegungen der drei Ebenen Schiebungen; die Schiebungsgeschwindigkeiten bilden das gleiche Sechseck wie bei Drehungen und können daher in der gleichen Weise gefunden werden, wenn nur die Schiebungsrichtungen gegeben sind.

34. Die Relativbewegungen von beliebig vielen komplanen Ebenen.

Ist n die Anzahl der sich gegeneinander bewegenden Ebenen, so hat jede dieser Ebenen gegen die $n-1$ übrigen eine relative Bewegung; folglich ist die Anzahl aller verschiedenen Relativbewegungen der n Ebenen

$$n(n-1) .$$

Diese Relativbewegungen sind im allgemeinen Drehungen um einen Punkt, den Pol, und da der Pol der Drehung von E_h gegen E_i derselbe ist, wie der von E_i gegen E_h, so ist die Anzahl aller Pole folglich

$$p = \tfrac{1}{2} n (n - 1) .$$

Diese p Pole liegen zu je dreien auf einer Graden, und zwar sind es die drei Pole der Relativbewegungen je dreier Ebenen. Daraus geht hervor, daß z. B. durch den Pol P_{hi} der beiden Ebenen E_h und E_i $n - 2$ Polgerade gehen müssen, denn mit den beiden Ebenen E_h und E_i läßt sich jede der $n - 2$ übrigen Ebenen zu je dreien kombinieren. Da durch jeden Pol $n - 2$ Polgerade gehen, aber nur zu je dreien der Ebenen eine Polgerade gehört, so ist die Anzahl aller Polgeraden

$$a = \frac{1}{3} p (n - 2) = \frac{n (n - 1) (n - 2) n}{1 \cdot 2 \cdot 3} .$$

So ergibt sich z. B. für

$$\begin{array}{lll} n = 3 & p = 3 & a = 1 \\ = 4 & = 6 & = 4 \\ = 5 & = 10 & = 10 \\ = 6 & = 15 & = 20 \ \text{usf.} \end{array}$$

Die p Pole sind alle eindeutig bestimmt, wenn die sämtlichen Relativbewegungen einer Ebene gegen die übrigen $n - 1$ Ebenen es sind. Da durch zwei gegebene Pole der Relativbewegungen dreier Ebenen die Polgerade bestimmt ist, so können nacheinander die Pole sämtlicher Relativbewegungen der n Ebenen zeichnerisch durch das Ziehen von Geraden unmittelbar oder mittelbar bestimmt werden, denn die entsprechenden Polgeraden schneiden sich in den unbekannten Polen. Zugleich erkennt man, daß die Polgeraden von einander abhängig sind, sobald $n \geqq 5$ ist; denn durch jeden Pol gehen $n - 2$ Polgerade. Hierin liegt zugleich eine Kontrolle für die Richtigkeit und Genauigkeit der Zeichnung. Im folgenden Kapitel werden Beispiele für die zeichnerische Ermittlung der Pole mittels der Polgeraden gegeben.

Wenn die gegenseitigen Bewegungen von n Ebenen durch h ihnen gemeinsame Hüllkurvenpaare zu bestimmten werden sollen, so muß, wie man ohne Schwierigkeit erkennt, mindestens

$$h = 3 n - 4$$

sein. Denn wählenn wir eine der n Ebenen als ruhend gedachte Bezugsebene, so werden die Bewegungen der übrigen $n - 1$ Ebenen zu bestimmten durch je zwei Hüllkurvenpaare, insgesamt also durch $2 (nn - 1)$. Hierzu treten noch für die Abhängigkeit der Bewegungen der $n - 1$ Ebenen untereinander $n - 2$ solcher Paare, denn betrachten wir irgendeine der $n-1$ Ebenen als treibende, so müssen die $n-2$ übrigen getriebenen Ebenen mit der treibenden durch je ein Hüllkurvenpaar verbunden werden, damit die getriebenen Ebenen in von der treibenden Ebene abhängige Bewegung kommen. Es ist sonach

$$h = 2(n-2) + n - 2 = 3n - 4.$$

Diese Zahl stimmt mit der aus Gleichung (I*) (S. 27) für $g = 0$ folgenden ganz überein, und da letztere für beliebige Anordnung der höheren Elementenpaare gilt, so läßt sich hieraus der Schluß ziehen, daß im allgemeinen die Hüllkurvenpaare beliebig auf die Ebenen verteilt werden können, wenn hierbei nur auf jede der n Ebenen mindestens drei verschiedene Hüllkurven entfallen. Erwägt man nun weiter, daß durch die h Hüllkurvenpaare die gegenseitigen Bewegungen der n Ebenen zu bestimmten werden, so müssen auch die p Pole völlig bestimmt sein; es muß demnach möglich sein, die $p = \frac{n(n-1)}{2}$ Pole der Relativbewegungen der n Ebenen mittels der $h = 3n - 4$ Berührungsnormalen der Hüllkurvenpaare zu bestimmen.

Wählt man in einer Ebene 2 Hüllkurven als konzentrische Kreise, so dreht sich diese Ebene gegen die Ebene, in der die beiden anderen Kurven liegen, die diese Kreise berühren, dauernd um den gemeinsamen Mittelpunkt der letzteren; beide Ebenen können folglich ohne Änderung ihres gegenseitigen Bewegungszustandes durch ein Drehpaar (Gelenk) verbunden werden. Wählt man ferner zwei Hüllkurven in einer Ebene als parallele Gerade, so vollzieht die Ebene gegen die Ebene, in der die zugehörigen Hüllkurven zweier Paare liegen, eine geradlinige Schiebung; demnach können beide Ebenen durch ein Schiebepaar verbunden werden. Man erkennt sonach, daß jedes Dreh- und Schiebepaar an die Stelle zweier Hüllkurvenpaare tritt, und daß, wenn g die Anzahl aller Dreh- und Schiebepaare bezeichnet, $2g$ Hüllkurvenpaare durch g Umschlußpaare ersetzt werden können. Bezeichnet h dann die Anzahl aller übrigen Hüllkurvenpaare, so haben wir in obiger Gleichung h durch $2g + h$ zu ersetzen, wodurch sie in

$$h + 2g - 3n + 4 = 0,$$

also in die Gleichung (I*) (S. 27) übergeht. Die Gleichung (I*) ist aber die Bedingungsgleichung der Zwangläufigkeit der HEP-Ketten, womit erkannt wird, daß die p Pole einer zwangläufigen höheren Elementenpaarkette völlig und eindeutig durch die Umscblußpaare und die Berübrungsnormalen der Hüllkurvenpaare bestimmt sein und sich, wie vorher erörtert, durch das Ziehen von Geraden unmittelbar zeichnerisch finden lassen müssen. Es ist dabei zu be-