Glieder 1 und 2, sowie 3 und 4, die gleiche Länge haben. Bewegt sich nun das Glied 2 gegen 1, bis es mit ihm zusammenfällt, dann fallen auch die Drehachsen der Drehpaare 14 und 23 zusammen, und die Glieder 3 und 4 ebenfalls. Diese Lage wird zur Wechsellage, sobald von dieser aus die Glieder 3 und 4 in relativer Ruhe gegeneinander bleiben, sich also wie ein einziges starres Glied weiter bewegen. Dasselbe gilt dann auch von den Gliedern 1 und 2. Es geht sonach das Gelenkviereck durch die Wechsellage in eine bewegliche Verbindung zweier Glieder, nämlich in ein Drehpaar über, dessen Drehachse die gemeinschaftliche Achse von 14 und 23 ist.

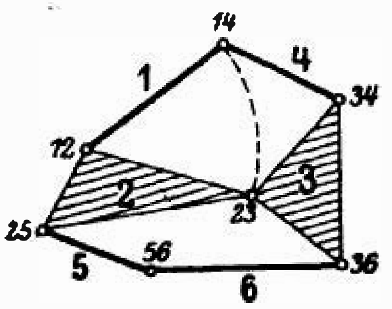

Fig. 51.

Verbindet man mit den Gliedern 2 und 3 dieses Getriebes zwei weitere Glieder 5 und 6 durch Drehpaare, so erhält man eine sechsgliedrige zwangläufige Drehpaarkette (Fig. 51) mit einer Wechsellage, durch die sie in das Gelenkviereck 2365 übergehen kann. In solcher Weise lassen sich Umschlußpaarketten mit Wechsellagen sehr vielfacher Art finden. Da sie jedoch bisher nicht angewendet worden sind, so soll auf sie nicht weiter eingegangen werden.

Viertes Kapitel.

Die übergeschlossenen ebenen Umschlußpaarketten.

24. Übergeschlossene Gelenkketten.

Es gibt kinematische Ketten, die zwangläufig beweglich sind, und doch der Gleichung (I) nicht genügen, wie z. B. die sog. Dreiparallelkurbelkette, die in Fig. 52 dargestellt ist. Diese Kette hat $n = 5$ bewegliche Glieder und $g = 6$ Drehpaare. Da hier

$$\tfrac{3}{2}n - 2 = \tfrac{11}{2},$$

so folgt

$$g > \tfrac{3}{2}n - 2;$$

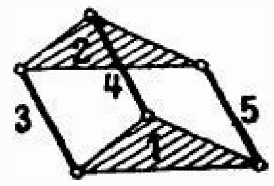

Fig. 52.

die Kette genügt also der Beziehung (I) nicht. Trotzdem ist sie zwangläufig beweglich, wie man sich auf geometrischem Wege leicht überzeugt, denn jeder beliebigen Lage der Kurbel 3 gegen das Glied 1 ordnen sich ganz bestimmte Lagen der Glieder 2, 4 und 5 zu. Der Grund für diese scheinbare Ausnahme liegt in dem Umstande, daß die Kette nur infolge der besonderen Abmessungen der Kettenglieder beweglich wird. Bei beliebigen Abmessungen ist sie dagegen ein in sich völlig unbewegliches Gebilde, nämlich ein sog. ebenes einfaches Fachwerk, wie es Fig. 53 darstellt. Die Dreiparallelkurbelkette ist sonach ein Ausnahmefall, aber nicht der einer zwangläufig beweglichen kinematischen Kette, sondern der eines Fachwerkes, das im allgemeinen ein starres Gebilde darstellt. Denn das Fachwerk Fig. 53 geht in die Dreiparallelkurbelkette Fig. 52 dadurch über, daß die binären Glieder 3, 4 und 5 gleich lang und die beiden ternären Glieder 1 und 2 als kongruente Dreiecke gewählt werden.

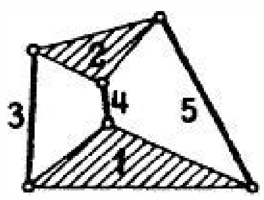

Fig. 53.

Derartige Ketten heißen **übergeschlossen**, weil sie mehr Glieder und Elementenpaare enthalten, als zur Erzeugung der Zwangläufigkeit notwendig sind. Denn man erkennt im obigen Beispiel unmittelbar, daß die Relativbewegung der Glieder 1 und 2 dieselbe bleibt, wenn man eines der drei Glieder 3, 4 oder 5 beseitigt. Geschieht dies aber, so erhält man ein Gelenkviereck, insbesondere ein Gelenkparallelogramm, und dieses ist zwangläufig beweglich.

Umgekehrt ersieht man hieraus, daß man aus im allgemeinen zwangläufig beweglichen kinematischen Ketten übergeschlossene ableiten kann, indem man an zwei der Glieder ein weiteres mittels je eines Elementenpaares beweglich anschließt. Im allgemeinen geht hierdurch die Kette in eine **unbewegliche** Verbindung der Glieder über, die nur in ganz besonderen Fällen, und zwar bei entsprechend gewählten voneinander abhängigen Abmessungen der Kettenglieder beweglich wird.

Eine übergeschlossene Drehpaarkette, die aus einer zwangläufigen Drehpaarkette durch Zufügung eines binären Gliedes mittels zweier Drehpaare entstanden ist, würde

$$n_0 = n + 1$$

Glieder und

$$g_0 = g + 2$$

Drehpaare enthalten, falls die entsprechenden Zahlen für die ursprüngliche Kette n und g waren. Da letztere zwangläufig vorausgesetzt wurde, für sie also die Beziehung (I) besteht, d. i.

$$2g - 3n + 4 = 0,$$

so folgt nach Einsetzung der Werte $n = n_0 - 1$, $g = g_0 - 2$

$$g_0 = \tfrac{3}{2} n - \tfrac{3}{2};$$

für die übergeschlossene Kette gilt demnach die Beziehung

$$g_0 > \tfrac{3}{2} n - 2.$$

Die gleiche Beziehung gilt selbstverständlich auch für alle die übergeschlossenen Drehpaarketten, die aus einer zwangläufigen Drehpaarkette dadurch entstanden, daß mehrere Glieder beweglich angeschlossen wurden.

Da die übergeschlossenen Drehpaarketten mehr Glieder und Elementenpaare enthalten, als zur Erzielung der zwangläufigen Bewegung nötig sind und außerdem ihre Beweglichkeit an z. T. komplizierte Bedingungsgleichungen für die Abmessungen der Kettenglieder gebunden ist, so werden sie nur ganz selten unmittelbar verwendet. Es soll deshalb auf sie im allgemeinen hier nicht näher eingegangen werden. Da sie aber zur Synthese von Mechanismen und zur Erzielnng bestimmter Bewegungen manchmal mit Vorteil benutzt werden können, so mögen die wichtigsten und bekanntesten derselben hier kurz besprochen werden.

Übergeschlossene Drehpaarketten kann man auseebenen Fachwerken dadurch ableiten, daß man die Bedingungsgleichungen für die Abmessungen der Kettenglieder aufsucht, unter denen das Fachwerk in ein Gebilde von endlicher Beweglichkeit übergeht. Diese Bedingungsgleichungen ergeben sich daraus, daß die Determinante der Bedingungsgleichungen (A) der Starrheit der Fachwerksglieder (s. S. 14) identisch verschwinden muß.

Einfacher und zwar auf geometrischem Wege wird man zu Gruppen von übergeschlossenen Drehpaarketten geführt durch gewisse kinematisch-geometrische Eigenschaften des gelenkigen Parallelogrammes und Antiparallelogrammes.

Bei dem Gelenkparallelogramm beschreiben die sämtlichen Punkte einer Seite kongruente gleichliegende Kreise um die entsprechenden Punkte der Gegenseite. Daher lassen sich je zwei derartige Punkte durch einen starren Stab (Kurbel) von gleicher Länge und Richtung verbinden, wie in dem Dreiparallelkurbelgetriebe (Fig. 52). Auf dem letzteren beruht u. a. die Robervalsche Wage (s. Fig. 54), sowie in mehrfacher Wiederholung das Buechanansche Ruderrad (s. Fig. 55).

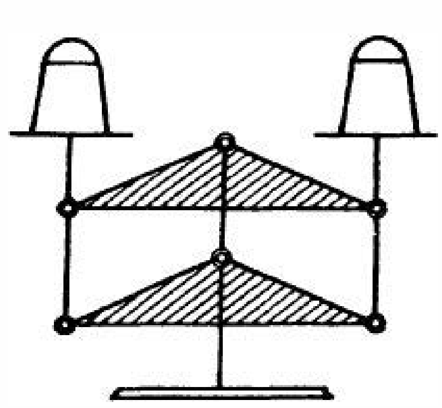

Fig. 54.

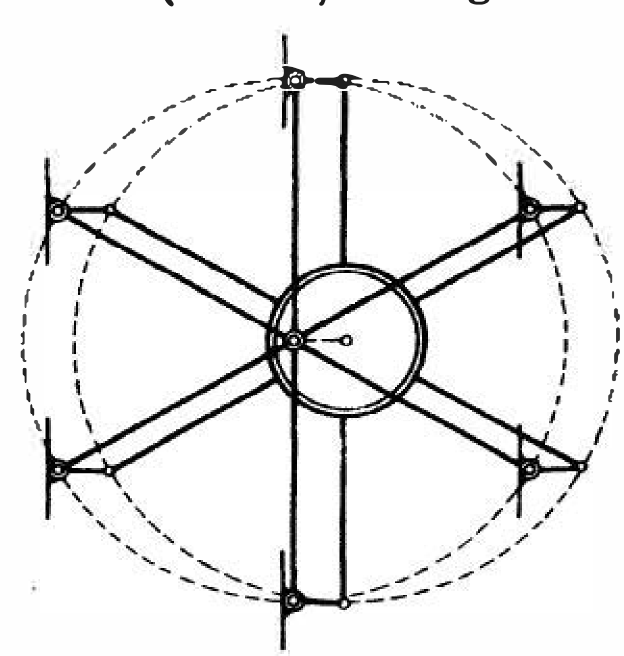

Fig. 55.

Eine weitere geometrische Eigenschaft des Gelenkparallelogrammes besteht darin, daß die 4 Punkte M, N, P, Q auf den 4 Gliedern des Gelenkparallelogrammes A, B, C, D (s. Fig. 56), die in einer Geraden liegen, diese letztere Eigenschaft in allen gegenseitigen Lagen der 4 Glieder bewahren. Hält man nun einen der

4 Punkte, z. B. M, fest und bewegt N auf irgendeiner Kurve (n), so bescnreiben P und Q ähnliche und ähnlich liegende Kurven. Auf dieser Eigenschaft beruht der bekannte Storchschnabel (Pantograph) zur ähnlichen Vergrößerung oder Verkleinerung von Zeichnungen. Ist die Kurve (n) ein Kreis, so sind folglich die Bahnen der Punkte P und Q auch Kreise, deren Mittelpunkte M_p und M_q mit M_n auf einer Geraden durch M liegen. Letztere Punkte lassen sich aber mit den Punkten N, P und Q paarweise durch starre Stäbe (Kurbeln) verbinden, ohne daß hierdurch eine Änderung der zwangläufigen Beweglichkeit der Kette herbeigeführt würde, und so entsteht eine übergeschlossene Gelenkkette von $n = 8$ Gliedern und $g = 11$ Drehpaaren, für die

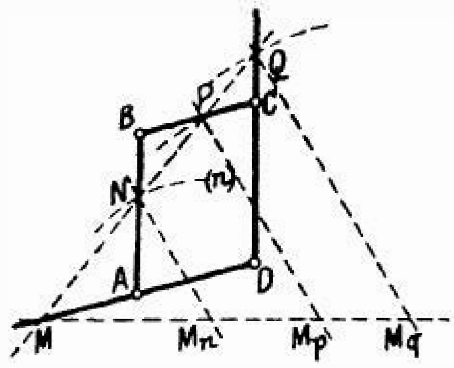

Fig. 56.

$$g > \tfrac{3}{2}n - 2$$

ist. Diese Kette ist also im allgemeinen, d. h. bei beliebigen Abmessungen der Kettenglieder unbeweglich; sie geht in eine zwangläufig bewegliche Kette nur über, falls $ABCD$ ein Parallelogramm ist und die 4 Punkte M, N, P, Q auf einer Geraden liegen.

Eine andere übergeschlossene Kette erhält man aus der Eigenschaft des Gelenkparallelogrammes, daß die Punkte P und Q zweier zusammenstoßender Seiten BC und CD (Fig. 57) des Parallelogramms ähnliche Kurven beschreiben, falls $\triangle PBC \sim \triangle CDQ$ und A in Ruhe bleibt. Wählt man nun als Bahn (q) des Punktes Q einen Kreis, so beschreibt auch P einen solchen und die Kreismittelpunkte M_p und M_q bilden mit A ein starres Dreieck, das ruht. Verbindet man nun P mit M_p und Q mit M_q durch starre Stäbe (Kurbeln) gelenkig, so entsteht eine übergeschlossene Drehpaarkette,

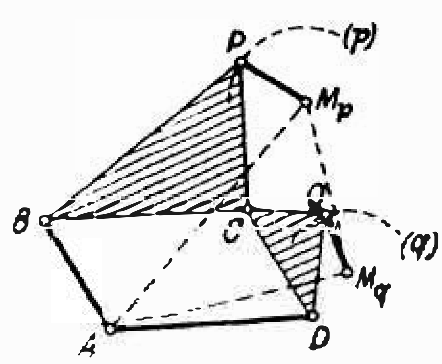

Fig. 57.

die von Sylvester herrührt. Die Anzahl ihrer Glieder ist $n = 7$, die der Drehpaare $g = 9$, da das Gelenk in A ein dreifaches, als• wie 2 Drehpaare zu zählen ist; folglich hat man

$$g > \tfrac{3}{2}n - 2.$$

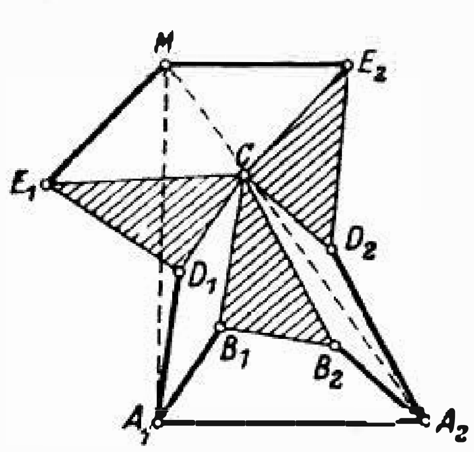

Fig. 58.

Auf einer Verbindung zweier derartiger Ketten beruht die übergeschlossene Gelenkkette, die den Satz von Roberts über die dreifache Erzeugung einer sog. Koppelkurve verwirklicht. Es sei (Fig. 58) $A_1 B_1 B_2 A_2$ ein beliebiges Gelenkviereck und C ein willkürlich gewählter Punkt seiner Koppel $B_1 B_2$. Die Kurve, die C bei der Bewegung der Koppel gegen den ruhend gedachten Steg $A_1 A_2$ beschreibt, heißt dann die Koppelkurve von C. Schließt man nun an A_1 und C, bzw. A_2 und C je ein weiteres Gliederpaar gelenkig an, so, daß $A_1 B_1 C D_1$ und $A_2 B_2 C D_2$ Gelenkparallelogramme werden, und wählt auf $D_1 C$ den Punkt E_1, auf $D_2 C$ den Punkt E_2 so, daß

$$\triangle B_1 B_2 C \sim \triangle D_1 C E_1 \sim \triangle C D_2 E_2,$$

dann beschreiben E_1 und E_2 Kreise um einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt M, dessen Lage gegen den ruhend gedachten Steg $A_1 A_2$ durch die Beziehung

$$\triangle A_1 A_2 M \sim \triangle B_1 B_2 C$$

eindeutig bestimmt ist. Verbindet man E_1 und E_2 mit M gelenkig durch starre Stäbe, so entsteht eine übergeschlossene Gelenkkette, die 4 ternäre und 6 binäre, insgesamt also $n = 10$ Glieder besitzt. Diese letzteren werden durch 4 zweifache und 6 einfache Gelenke beweglich verbunden; es ist also hier $g = 2 \cdot 4 + 6 = 14$ und folglich

$$g > \tfrac{3}{2} n - 2.$$

Diese zehngliedrige übergeschlossene Kette ist dadurch ausgezeichnet, daß sie drei Gelenkvierecke enthält, deren Koppeln $B_1 B_2$, $D_1 E_1$ und $D_2 E_2$ einen Punkt, nämlich C gemeinsam haben. Dieser Punkt beschreibt demnach in allen drei Gelenkvierecken dieselbe Koppelkurve, eine Eigenschaft, die sich mit Vorteil bei der Synthese neuer Mechanismen verwerten läßt.

Der Robertssche Satz erfährt eine Einschränkung, wenn an die Stelle des Gelenkviereckes $A_1 B_1 B_2 A_2$ eine Schubkurbelkette $A_1 B_1 B_2 A_{2\infty}$ (s. Fig. 58a) tritt, weil es dann nur zwei verschiedene Schubkurbelketten gibt, deren gemeinsamer Koppelpunkt C dieselbe Koppelkurve beschreibt.

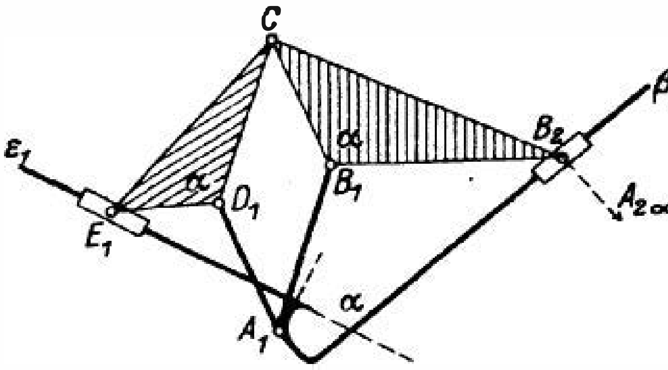

Fig. 58a.

Denn wenn A_2 in das Unendliche rückt, also B_2 auf einer Geraden β_2 der ruhenden Ebene sich bewegt, so wird nicht nur $A_1 A_2$ unendlich groß, sondern auch $A_2 B_2$, und folglich auch das Dreieck $C D_2 E_2$, weil $C D_2 \# B_2 A_2$ ist. Da auch M ins Unendliche fällt, so liegen folglich sämtliche Gelenkpunkte des ursprünglichen Gelenkviereckes $A_2 D_2 E_2 M$ im Unendlichen und kommt letzteres also nicht mehr in Betracht. Da M der Mittelpunkt des Kreises ist, den E_1 gegen die ruhende Ebene beschreibt, und nun ins Unendliche fällt, so beschreibt in dieser Kette auch E_1 eine Gerade (ε_1) gegen die ruhende Ebene, die mit β_2 denselben Winkel α einschließt, der bei B_1, bzw. D_1 in den beiden ähnlichen Dreiecken CB_1B_2 und $E_1D_1C_1$ auftritt.

Wird noch ein weiteres Drehpaar der Schubkurbelkette durch ein Schiebepaar ersetzt werden, so verliert der Robertssche Satz seine Bedeutung, weil dann auch das dritte Gelenkviereck $A_1D_1E_1M$ der ursprünglichen Kette ins Unendliche rückt, d. h. die Koppelkurve nur von einem Punkte der Koppel der einen viergliedrigen Kette (einer Kreuzschleifenkette Fig. 32 oder einer Winkelschleifenkette Fig. 33) beschrieben würde.

Ein anderes Prinzip, übergeschlossene Gelenkketten zu bilden, ist das der Inversion. Zwei Punkte P und Q heißen invers gegen einen Punkt O, wenn

$$OP \cdot OQ = \text{const.}.$$

Derartige Punkte sind z. B. die Schnittpunkte P und Q einer beliebigen zu AC, bzw. BD parallelen Geraden mit den beiden Seiten AB und CD eines sog. Antiparallelogrammes $ABCD$ (s. Fig. 59), in dem $AB = CD$ und $AD = BC$ ist. Bezüglich des Schnittpunktes O besteht dann die Beziehung

$$OP \cdot OQ = \text{const.}$$

Die analoge Beziehung besteht für den Schnittpunkt R. Wird nun O festgehalten und P auf einer beliebigen Kurve p bewegt, so beschreibt Q die zu letztere inverse (kreisverwandte) Kurve q. Ist p ein Kreis mit dem Mittelpunkt M_p (s. Fig. 60), so wird auch q

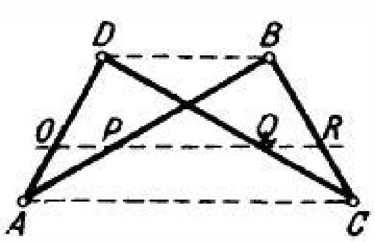

Fig. 59.

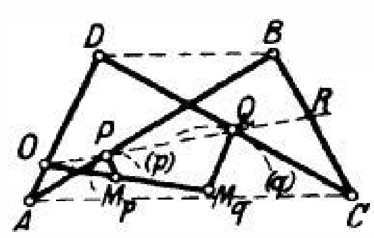

Fig. 60.

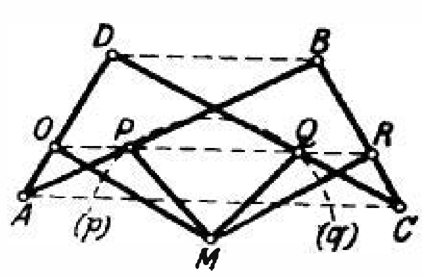

Fig. 61.

ein Kreis, dessen Mittelpunkt M_q mit M_p und O auf einer Geraden liegt. Verbindet man P mit M_p und Q mit M_q durch starre Stäbe, so erhält man folglich eine übergeschlossene Gelenkkette von $n = 7$ Gliedern und $g = 9$ Drehpaaren, wie sie Fig. 60 darstellt.

Geht der Kreis p durch Q, so fällt mit ihm der Kreis q zusammen, und dann beschreibt auch R einen Kreis, der durch O geht und denselben Mittelpunkt M hat, wie p. In diesem besonderen Falle erhält man durch Einfügung der drei Kurbeln MP, MQ und MR eine übergeschlossene Gelenkkette von $n = 8$ Gliedern und $g = 11$ Drehpaaren, da M ein dreifaches Gelenk wird (s. Fig. 61).

Eine allgemeinere derartige Kette erhält man, wenn man sich mit den 4 Gliedern des Antiparallelogramms je einen Punkt starr verbunden denkt derart, daß die 4 Dreiecke (s. Fig. 62) ABO, BCP, CDQ, DAR ähnlich und die Winkel

$$\angle OAB = \angle PCB = \angle QCD = \angle RAD = \varphi$$

sind. Dann bilden die 4 Punkte O, P, Q, R die Ecken eines Parallelogramms. Wählen wir einen dieser Punkte, z. B. O als Fixpunkt, so beschreiben P und Q inverse Kurven, und zwar beide Kreise, wenn z. B. P auf einem Kreise geführt wird. Verbindet man wieder die Punkte P und Q mit den Kreismittelpunkten durch starre Kurbeln, so erhält man eine übergeschlossene Drehpaarkette mit $n = 7$ Gliedern und $g = 9$, für die $g > \frac{3}{2}n - 2$ ist.

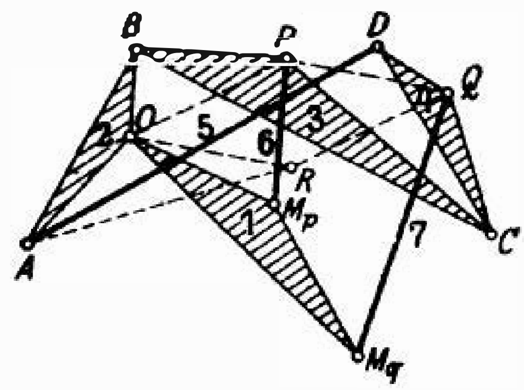

Fig. 62.

Eine besondere Gruppe von übergeschlossenen Gelenkketten bilden die sog. Brennpunktsmechanismen, auf die Burmester zuerst aufmerksam machte. Ist (Fig. 63) $ABCD$ ein beliebiges Gelenkviereck, so läßt sich auf jedem der 4 Glieder ein Punkt (T, U, V, W) finden, der mit einem bestimmten Punkte F durch starre binäre Glieder TF, UF usw. beweglich verbunden werden kann, ohne daß hierdurch die Zwangläufigkeit der Bewegung des Gelenkviereckes aufgehoben wird. Es ergibt sich hierdurch eine übergeschlossene Drehpaarkette mit $n = 8$ Gliedern und $g = 11$ Drehpaaren, die zweifach übergeschlossen ist, da man 2 der vier Glieder TF, UF, VF und WF beseitigen kann, ohne die Zwangläufigkeit der Bewegungen der nachbleibenden Ketten aufzuheben.

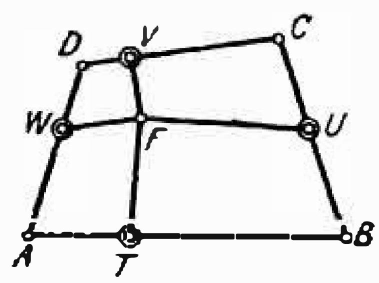

Fig. 63.

25. Übergeschlossene Umschlußpaarketten.

Ein bekanntes Beispiel einer solchen Kette erhält man aus der Kreuzschleifenkette (s. Fig. 32), wenn man beachtet, daß die Bewegung des Gliedes AB (s. Fig. 64) gegen das ruhende Glied die Hypozykloidenbewegung des Cardano ist. Bei dieser rollt ein Kreis (π) in einem ruhenden Kreise (p); es beschreibt also der Mittelpunkt

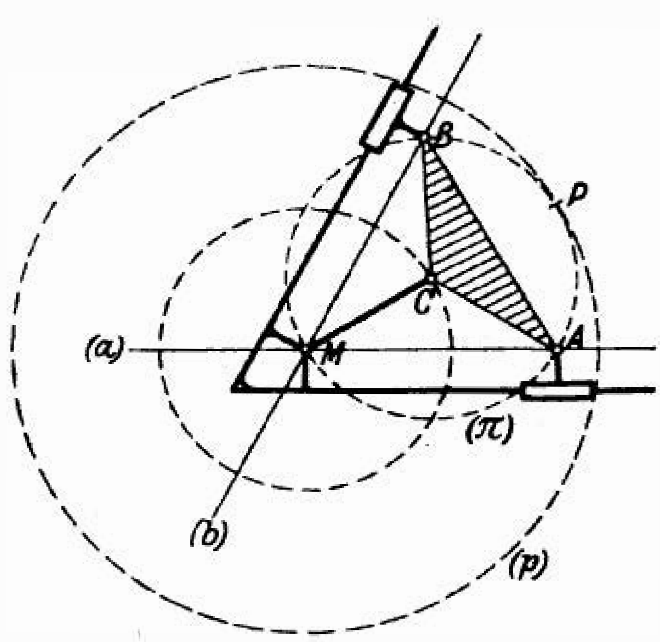

Fig. 64.

C von (π) einen Kreis um den Schnittpunkt M der Geraden a und b, auf denen die Punkte A und B sich zu bewegen gezwungen sind. Folglich läßt sich C mit M durch eine starre Gerade gelenkig verbinden, ohne hierdurch die Beweglichkeit der übrigen Kettenglieder aufzuheben. Durch diese Verbindung, d. i. durch Einschaltung eines weiteren Gliedes in die ursprünglich viergliedrige Umschlußpaarkette erhalten wir eine übergeschlossene Umschlußpaarkette, für welche $n = 5$, $g = 6$, also $g > \frac{3}{2} n - 2$ ist.

Übergeschlossene Umschlußpaarketten erhält man ferner aus allen genauen und angenäherten Geradführungen, indem man z. B. den Punkt P (Fig. 65), der die Gerade (p) beschreibt, gelenkig mit einem Gliede verbindet, das durch ein Schiebepaar mit zu (p) paralleler Schubrichtung beweglich an das ruhende Glied der Kette angeschlossen wird, wie das die Figur andeutet. Denn trotz Einschaltung eines weiteren Gliedes behält die Kette ihre Beweglichkeit, wenn die erstere in der angegebenen Weise bewirkt wird. Beispiele liefern die Geradführungen von Peaucellier, Kempe und Hart, sowie die angenäherten Geradführungen von Roberts, Watt, Evans, Tschebischeff, Burmester u. a. Geradführungen werden an sich in der Gegenwart nur ganz selten angewendet und dann naturgemäß ohne den erwähnten Überschluß durch ein Schiebepaar; es liegt also keine Veranlassung vor, auf sie näher einzugehen, ebensowenig wie auf die sonst noch möglichen übergeschlossenen Umschlußpaarketten.

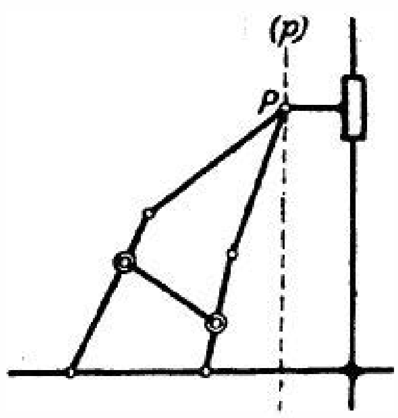

Fig. 65.

26. Übergeschlossene höhere Elementenpaarketten.

Der Überschluß kann erfolgen sowohl durch niedere als höhere Elementenpaare. Im ersteren Falle sind die Bedingungen der Möglichkeit eines Überschlusses dieselben, wie für die Umschlußpaarketten; auf letztere kann deshalb hier verwiesen werden.

Wie auf S. 27 und 28 schon hervorgehoben wurde, sind die in den HEPe Ketten verwendeten unselbständig und selbständig zwangläufigen höheren Elementenpaare in den weitaus häufigsten Fällen übergeschlossen und folglich sind es auch die entsprechenden Ketten; es bedarf daher dieser Fall keiner besonderen Behandlung. Wohl aber könnte es eintreten, daß ein Kettenglied einer zwangläufig beweglichen Umschlußpaar- oder HEP-Kette, das eine bestimmte Bewegung gegen ein anderes Glied besitzt, mit letzterem durch ein höheres Elementenpaar beweglich verbunden werden soll. Das ist nur möglich, wenn das letztere Paar bestimmten Bedingungen