SUPPLEMENTUM

DE

MOTU CORPORUM

RIGIDORUM A FRICTIONE PERTURBATO.

CAPUT I.

DE FRICTIONE IN GENERE.

DEFINITIO.

955. *Frictio* est resistentia, quam corpus super superficie aspera incedens eamque radens, in motu suo patitur.

Est ergo frictio vis motus directioni contraria, et basi corporis, qua superficiem tangit, applicata

COROLL. 1.

956. Quamdiu corpus quiescit, *frictio nullam plane vim exerit*, statim autem atque corpus movetur, subito ejus vis existit motui semper contraria eumque propterea retardans.

COROLL. 2.

957. Si corpus a vi quapiam sollicitetur, etiamsi quiescat, frictio se illi vi opponit, quoniam in prima motus generatione statim existit, ac nisi vis sollicitans frictionem superet, corpus movere non valebit.

COROLL. 3.

958. Quia directio frictionis motus directioni jugiter est contraria, mutata motus directione simul frictionis directio mutatur. Statim autem atque corpus ad quietem redigitur, uti motus directio tollitur, ita subito frictio evanescit.

EXPLICATIO.

959. Ad haec, quae ad frictionem pertinent, dilucidanda, ad omnes circumstantias, quae ad frictionem quicquam conferre posse videantur, attendi conveniet, etsi adhuc minime pateat, quid quisque efficere valeat. Primo igitur superficies, super qua fit incessus, considerari debet, quae sive sit plana sive secus parum refert, quoniam

fig. 125. quovis tempore ad contactum eſt reſpiciendum. Sit igitur EF ſuperficies, quam tanquam planam contemplemur, ſiquidem hinc facile ad ſuperficies convexas et concavas judicium extendere licebit: hujus ergo aſperitas praecipuum locum inter cauſas frictionis tenet, quoniam ſi ſuperficies perfecte eſſet polita et laevigata, frictioni nullus locus relinqueretur: ex quo colligitur, quo magis ſuperficies fuerit aſpera, eo majorem frictionem fieri oportere. Deinde baſis corporis AB, qua fit contactus, in computum eſt ducenda, cujus magnitudo et figura an quicquam ad frictionem conferat, nondum liquet, aſperitas vero certe cum aſperitate ſuperficiei conjuncta, ubi imprimis motui eſt obſtaculo, ita frictionem generare eſt putanda. Circa ipſum denique corpus ABCD praeter ejus maſſam reliquasque proprietates, ejus preſſio ad ſuperficiem ſine dubio maximi eſt momenti, quoniam ſi nulla vi ad eam apprimeretur, nulla certe frictio adeſſet, corpusque perinde moveretur, ac ſi ſuperficies abeſſet. Cum tandem frictio non niſi in motu cernatur, celeritas quoque tanquam inſigne frictionis momentum videri poſſet, ſed praeter expectationem videbimus, celeritatem nullo modo ad frictionem determinandam concurrere, quod eo magis eſt mirandum, cum ſublata celeritate omnis frictio certe ceſſet. Quod ſi ergo corpus ſecundum directionem BF ſuper ſuperficie promoveatur, vis aderit, qua id ſecundum directionem oppoſitam AE ſollicitatur, haecque vis frictio vocatur.

SCHOLION.

960. Frictionem hic primo tanquam phaenomenon conſiderabo, cujus quantitas et indoles nobis experientia innotuerit, deinceps in ejus cauſas, quantum fieri licet, inquiſiturus. Cum enim hic phyſicae corporum qualitates, cujusmodi ſunt aſperitates ſuperficierum, et ratio, qua duae ſuperficies invicem appreſſae ſibi mutuo cedant, et minimis particulis quasdam impreſſiones inducant, totum quaſi negotium conficiant; ob defectum talis cognitionis corporum contenti eſſe debemus phaenomena frictionis ita accipere, prouti ea nobis ab experientia ſuppeditantur, quemadmodum etiam aliarum virium, quarum effectus in Mechanica evolvimus, origo minime eſt perſpecta. Quae ergo per experientiam nobis circa frictionis indolem innotuerunt, breviter recenſeamus.

PHAENOMENON. 1.

961. *Si cetera ſint paria, frictio non pendet a corporis celeritate, ſed ſive id celerius incedat ſive tardius, eandem exerit vim, cujus directio ſemper eſt contraria motus directioni.*

CO-

COROLL. 1.

962. Frictio ergo non tanquam functio quaedam celeritatis ſpectari poteſt, cum perpetuo eandem quantitatem ſervet, ſive motus ſit celerrimus, ſive tardiſſimus. Interim tamen, motu penitus ceſſante, ſubito evaneſcit.

COROLL. 2.

963. Etſi autem frictio a motus celeritate neutiquam pendet, tamen ejus directio per motus directionem unice determinatur, quippe cui eſt contraria et in ipſo contactu applicata.

SCHOLION.

964. De motu corporis abſoluto haec ſunt intelligenda, ſi ſuperficies, in qua corpus incedit, abſolute quieſcat, ſin autem haec ſuperficies ipſa moveatur, ex motu corporis reſpectivo ad ſuperficiem relato judicium eſt petendum. Scilicet ſi corpus reſpectu ſuperficiei quieſcat, etiamſi utcunque moveatur abſolute, frictio eſt nulla, ſin autem reſpectu ſuperficiei moveatur, frictio eam impetrat quantitatem, quam reliquae circumſtantiae exigunt, neque quantitas motus huc quicquam confert. Directio autem frictionis per directionem reſpectivam corporis reſpectu ſuperficiei conſtanter determinatur: neque igitur hic motum ſecundum duas tresve directiones reſolvere licet, et pro quolibet, quaſi ſolus adeſſet, frictionem definire, indeque frictionem totam colligere: ſed uti quantitas frictionis non a motus quantitate pendet, ita directio ſemper ex directione, ſecundum quam corpus ſuper ſuperficie incedit, definiri debet. Ceterum hoc phaenomenon non ita accurate per experimenta indicatur, ut nullis plane dubiis ſit ſubjectum: quin potius motus celerrimi ab hac regula aliquantillum recedere videntur. Quodſi forte veritati fuerit conſentaneum, id potius alii cauſae tribuamus, quam ſtabilitam frictionis notionem immutemus: et cum aberratio ſit valde parva, eam eo magis negligamus, cum alias nonnullas exiguas vires, quae ex eodem fonte atque frictio originem trahere videntur, negligere cogamur. Hic ſcilicet in eos tantum effectus, qui a frictione prouti vulgo concipi ſolet, inquirere conſtitui, de aliis motus obſtaculis minime ſollicitus.

PHAENOMENON. 2.

965. *Si cetera ſunt paria, quantitas frictionis etiam neque a figura neque magnitudine baſis, qua corpus ſuperficiem contingit, pendet; ſed ſi-*

ve ea fuerit major ſive minor, et cujuscunque figurae, frictio eandem ſemper vim exerit.

COROLL. 1.

Fig. 125.

966. Quodſi ergo baſis, qua corpus ſuperficiem contingit, AB ponatur $= bb$, haec quantitas non in expreſſionem frictionis ingreditur, aeque parum ac velocitas corporis.

COROLL. 2.

967. Neque etiam frictio mutatur, licet contactus in unico fiat puncto, quemadmodum evenit, ſi corpus ſit globus ſeu corpus baſi convexa praeditum: dummodo corpus ſuperficiem radat.

SCHOLION.

968. Hoc phaenomenon, etſi certiſſimis experimentis confirmatum, exceptionem tamen patitur, ſi corpus in acutiſſimam deſinat cuſpidem, qua ſuperficiei infigi queat, quo caſu ſine dubio penitus coerceretur. Excipiendi ſcilicet hinc ſunt caſus, quibus ſuperficies ab incedente corpore damnum patitur, de quibus etiam hic non tractabimus. Ceterum maxime paradoxon videbitur, quod a contactu in unico puncto facto tanta frictio naſci queat, quanta a baſi ſatis vaſta, cum frictio ab aſperitate ambarum ſuperficierum, quae ſe mutuo terunt producatur, in ampliori autem contactu plus aſperitatis ſuperari debeat. Verum hoc dubium mox evaneſcet, cum oſtendemus, quomodo frictio ſe ratione preſſionis habere debeat.

PHAENOMENON. 3.

969. *Si cetera ſint paria, frictio proportionalis eſt preſſioni, qua corpus ad ſuperficiem apprimitur: eoque majori preſſionis parti aequatur, quo major fuerit aſperitas ſuperficierum ſe mutuo atterentium.*

COROLL. 1.

970. Quodſi corpus nulla plane vi ad ſuperficiem, ſuper qua incedit, apprimatur, nullam etiam patietur frictionem; quae autem eo major evadet, quo magis appreſſio augetur.

COROLL. 2.

971. Si ergo aſperitas fuerit eadem, frictio, quam corpora ſuper ſuperficiebus incedentia patiuntur, certae cuidam parti preſſionis aequatur; qua parte cognita, frictionis quantitas perfecte determinatur.

CO-

COROLL. 3.

972. Quodſi ergo corpus ABCD vi $= P$ ad ſuperficiem apprimatur, ac ſuper ea incedat in directione BF, frictio erit $= \mathfrak{f}P$ (denotante $\mathfrak{f}$ partem illam memoratam) qua corpus ſecundum directionem oppoſitam AE retrahitur. Fig. 125.

SCHOLION. 1.

973. Haec manifeſta ſunt, quando corpus motu progreſſivo incedit ſuper ſuperficie, quo caſu frictio motus directioni eſt contraria. Verum ſi corpus inſuper habeat motum quempiam gyratorium, videndum eſt, in quanam directione baſis ſuperficiem terat, huicque erit contraria frictionis directio; cujus quantitas cum ex preſſione conſtet, effectus frictionis in motu corporis perturbando ex principiis ſupra ſtabilitis definiri poterit. Ceterum quemadmodum frictio a ſolo attritu corporis et ſuperficiei oritur, patet ſi corpus ita volvendo promoveatur, ut nullus attritus exiſtat, cujusmodi motus provolutio perfecta vocatur, nulla etiam frictio locum habebit: ſimulatque autem motus volutorius tantillo fuerit celerior vel tardior, quam illa conditio poſtulat, ſicque attritus ſeſe adiniſceat, etiamſi ſit minimus, tamen ſtatim ſubito plena frictio $\mathfrak{f}P$ effectum ſuum exerit. Quare phaenomena hinc orta ingentem ſaltum implicare debent, cum pro certa motus ſpecie omnis frictio ſubito tollatur, dum autem motus tantillum inde diſcrepat, pleno effectu adſit.

SCHOLION. 2.

974. Inſigne calculi compendium hinc conſequimur, quod frictio tam ſimpliciter exprimitur, et a ſola preſſione P cum fractione $\mathfrak{f}$, quam aſperitas definit, pendet; ſi enim inſuper tam a celeritate corporis quam ab ejus baſi penderet, facile in calculos inextricabiles illaberemur. Ac ſi calculum ad praxin accomodare velimus, totum negotium ad valorem fractionis $\mathfrak{f}$ reducitur, quem unico experimento pro ſingulis corporum generibus aſſignaſſe ſufficit. Pro corporibus autem ligneis experimenta oſtendunt litterae $\mathfrak{f}$ valorem circiter $\frac{1}{3}$ tribui debere, ſi quidem eorum ſuperficies mediocriter fuerit dolata, ſin autem magis ſit rudis et aſpera, majorem valorem ſortitur, quemadmodum e contrario corpora metallica probe polita pro littera $\mathfrak{f}$ fractionem $\frac{1}{4}$ adeoque minorem exigunt. Verum ex ſequentibus patebit, quomodo quovis caſu per experimenta conveniens fractionis $\mathfrak{f}$ quantitas facile explorari queat. Experientia autem didicimus, nullam ſuperficiem neque

que corpus tam perfecte poliri poſſe, ut frictio plane evaneſcat, quin potius ſemper ſatis notabili adhuc parti frictionis aequari deprehenditur. Quare quae ſupra de motu corporum ſuper plano politiſſimo, quod nullam gignat frictionem, ſunt allata, in praxi neutiquam locum inveniunt.

PROBLEMA. 1.

975. Si corpus ſuperficiei cuicunque incumbens quieſcat, ſimulque a viribus quibuscunque ſollicitetur, diſtinguere caſus, quibus id vel ad motum impellatur vel in quiete perſeveret.

SOLUTIO.

Fig. 125. Omnes vires, quibus corpus ABCD ſollicitatur, reſolvantur in binas, quarum altera ſit ad ſuperficiem normalis, altera eidem parallela. Sit P ſumma omnium ad ſuperficiem perpendicularium, quatenus corpus ab iis ad ſuperficiem apprimitur, erit P preſſio, foretque δP frictio, ſi corpus moveretur. Quod ad alteras vires attinet, conſideremus hic tantum caſum, quo ab iis corpori motus progreſſivus induceretur, ſi nulla eſſet frictio; quoniam motus gyratorius ampliorem poſtulat evolutionem infra ſuſcipiendam. Cum igitur corpus alium motum niſi ſecundum directionem ſuperficiei recipere nequeat, vires huic parallelae quaſi uni puncto applicatae ſpectentur, earumque quaeratur aequivalens, quae ſit = V ſecundum directionem BF urgens, atque manifeſtum eſt, quamdiu fuerit $V < \delta P$ corpus in quiete eſſe perſeveraturum, neque id commoveri poſſe, niſi vis ſollicitans V major fuerit, quam δP. Habemus ergo pro vi ſollicitante V terminum δP, quo ſi vis fuerit minor, nullus motus ſit conſecuturus, ſin autem fuerit major, tum demum motus producatur.

COROLL. 1.

976. Cum corpus in quiete perſiſtere pergat, quamdiu fuerit $V < \delta P$, frictio cenſenda eſt vim exercere ipſi vi V aequalem et contrariam: ſi enim fortius urgeret, corpus in plagam oppoſitam AE moveri deberet, quod eſſet abſurdum, cum in plagam BF incitetur.

COROLL. 2.

977. Dum ergo corpus quieſcit, frictio non determinatam exerit vim, ſed quovis caſu tantam, quanta opus eſt ad corpus in quiete conſervan-

ſervandum, niſi opus fuerit vi majori quam $\mathfrak{P}$. Unde ſi corpus a nulla vi ſollicitetur ad motum, etiam frictio nullam vim exercet.

COROLL. 3.

978. Quamdiu ergo motus a vi, quae non ſuperet $\mathfrak{P}$, impediri poteſt, eam vim frictio ſuppeditat, et quidem ſecundum eam directionem, qua opus eſt ad motum impediendum. Sin autem quietis conſervatio majorem poſtulet vim, quoniam frictio tantum praeſtare nequit, motus generabitur.

SCHOLION. 1.

979. Cum ſupra dixerimus, in quiete corporum nullam dari frictionem, id de vera quiete tantum, in qua corpus eſſet perſeveraturum, etiamſi nulla adeſſet frictio, eſt intelligendum. Statim enim atque corpus a viribus ſollicitatur, quibus ad motum incitaretur, ſi nulla eſſet frictio, huic etiam motus productioni frictio reluctatur, etiamſi corpus adhuc ſit in quiete. Ita igitur frictio tam ratione motus quam quietis eſt definienda, ut dum corpus movetur, vim exerat perpetuo ipſi $\mathfrak{P}$ aequalem et ſecundum directionem motui contrariam: dum autem corpus quieſcit, eadem vim non per ſe definitam, ſed tantam duntaxat exerceat, quanta motui impediendo ſufficit, niſi forte ad hoc majori vi opus ſit quam $\mathfrak{P}$: tum enim hac tantum vi $\mathfrak{P}$ motus productioni reſiſtit, quae cum motum coercere non valeat, motus revera generabitur. Vis ſcilicet $\mathfrak{P}$ eſt maximus conatus, quo frictio anniti poteſt, quo revera ſemper ipſi motui reſiſtit, et quo etiam motus generationi reluctatur, ſi opus eſt. Sin autem minor vis ſufficiat, etiam minorem tantum exerit: ſeu quoties vis ad motus productionem cohibendam neceſſaria non fuerit major quam $\mathfrak{P}$, ea vis a frictione ſuppeditatur. Haec autem tantum de motu progreſſivo ſunt tenenda, ſi enim motus gyratorius accedat, praecipue ſi axis gyrationis fuerit ad ſuperficiem inclinatus, res eſt altioris indaginis, et quia hoc caſu non omnia baſis elementa ſecundum eandem directionem moventur, ſuperficiemque terunt, frictio ſingulorum elementorum conſiderari debet, ex quo etiam baſis figura et magnitudo in computum ingredietur. Atque ad hanc circumſtantiam ſupra, ubi baſis figuram a determinatione frictionis removimus, non reſpeximus.

SCHOLION. 2.

980. Difficile ſane eſt frictionis, quemadmodum hic eam experientiae conſentaneam ſtatuimus, cauſam aſſignare, facile autem cauſas, quae

quae forte menti occurrant, refellere. Perſpicuum enim eſt, neque ab abraſione quadam particularum, neque a depreſſione filamentorum, dum corpus ſuper ſuperficie incedit, frictionem oriri poſſe, quia tum neceſſario baſeos magnitudo in computum intraret. Quod ad frictionem, quatenus motus generationi reſiſtit, attendamus, ea ſequenti modo haud inepte explicari poſſe videtur. Dum nempe corpus ABCD ſuperficiei EF incumbit, contactus non ſecundum planum AB, ut ſenſus oſtendit, fieri eſt concipiendus, ſed ob minimas utrinque prominentias et cavitates ſecundum ſuperficiem ſinuoſam et quaſi undulatam, *ab ab ab*, dum ob preſſionem prominentiae alterius in cavitates alterius ſe inſinuant. Hoc admiſſo corpus moveri nequit, quin ſimul ſupra ſuperficiem AB aliquantillum elevetur; ſeu prima motus impreſſio non ſecundum directionem OV ipſi AB parallelam, ſed ſecundum quandam directionem OS inclinatam fieri debet, quae ſcilicet parallela ſit maximae quaſi declivitati in contactu illo ſinuoſo: atque haec declivitas ſeu obliquitas reſpondet aſperitati utriusque ſuperficiei in contactu ita, ut pro majore minoreve aſperitate angulus VOS major minorve ſit concipiendus. Statuatur ergo iſte angulus VOS $= \zeta$, corpusque ſuperficiei apprimatur vi $OP = P$, ac jam videamus, quanta vi ſecundum directionem OV agente opus ſit, ut corpus de ſitu ſuo dimovere valeat. Agat ergo vis $OV = V$, a qua corpus ſecundum directionem OS ſollicitabitur vi $= V \cos \zeta$: at vis preſſionis $OP = P$ huic actioni reſiſtit vi $= P \sin \zeta$. Quare niſi fuerit $V \cos \zeta > P \sin \zeta$ ſeu $V > P \operatorname{tang} \zeta$, corpus de quiete non deturbabitur; vel quamdiu vis ſollicitans $OV = V$ minor fuerit quam $P \operatorname{tang} \zeta$, corpus in quiete perſeverabit. Id quod egregie cum ſupra traditis convenit, cum loco fractionis illius δ hic habeamus tangentem cujuspiam anguli ζ. Verum fateri cogor, hinc non intelligi, cur dum corpus movetur, frictionis vis motui contraria etiam ipſi $P \operatorname{tang} \zeta$ aequalis eſſe debeat: cum enim baſis corporis alternatim ſe ex illis ſinuoſitatibus expediat, iterumque ſe eo inſinuet, minus patet quantum detrimentum hinc motus ſit paſſurus. Quoniam tamen hypotheſis ſtabilita hinc non evertitur, ei inhaereamus, cauſamque hic aſſignatam tanquam a vero non abhorrentem ſpectemus.

Fig. 126.

CAPUT

CAPUT II.

DE MOTU PROGRESSIVO CORPORUM GRAVIUM A FRICTIONE IMPEDITO.

PROBLEMA. 2.

981. Si corpus grave ſuper plano horizontali motu progreſſivo incedat; determinare motus retardationem a frictione oriundam.

SOLUTIO.

Sit M corporis maſſa idemque ejus pondus, quod planum horizontale EF tangat baſi ſua AB, quam pariter planam eſſe oportet. Conſideretur corporis centrum inertiae O, in quo ejus pondus M collectum concipiatur, ita ut corpus deorſum ſollicitetur vi OP = M, quae cum ad planum EF ſit normalis, tanta quoque vi ad planum apprimitur: ubi primum obſervo, niſi recta OP intra corporis baſin AB cadat, **motum progreſſivum eſſe non poſſe.** Verum ne hoc quidem ſufficit, cum enim progrediente corpore ſecundum directionem BF id ſecundum directionem contrariam BE ob frictionem retrahatur vi = ϑM, denotante ϑ rationem preſſionis ad frictionem, haec vis conatur corpori motum gyratorium circa horizontalem axem per O tranſeuntem inducere, cujus momentum eſt = ϑM. OP. Cui vi ſi corpus obſequatur, primo inſtanti baſis punctum A elevari incipiet, ita ut jam totum corpus extremitati baſis B innitatur, quo etiam preſſio transferetur. In hoc ergo ſtatu ad gyrandum proclivi corpus in B ſurſum urgeri cenſendum eſt vi BM = M, unde momentum gyrationi reſiſtens naſcitur = M. BP: quod niſi ſuperet illud ϑM. OP, corpus revera gyrari incipiet. Quare cum hic tantum motum progreſſivum contemplari ſtatuerimus, haec conditio inſuper requiritur, ut ſit BP > ϑ. OP, quam ergo hic locum habere aſſumamus. Fuerit ergo initio corporis celeritas ſecundum directionem EF = c, et elapſo tempore t confecerit ſpatium = s, habeatque celeritatem = v. Atque ob vim ϑM motui contrariam erit $\frac{dv}{2g\,dt} = \frac{-\vartheta M}{M} = -\vartheta$, ideoque $v = c - 2g\vartheta t$. Porro quia eſt $ds = vdt$, fiet $s = ct - \vartheta gtt$. Motus autem tamdiu tantum durabit, quoad corpus ad quietem fuerit reductum, frictione ϑM tum ſubito

Fig. 127.

bito ceſſante: corpus ergo ad quietem redigetur elapſo tempore $t = \frac{c}{2\delta g}$ et percurſo ſpatio $= \frac{cc}{4\delta g}$.

COROLL. 1.

982. Ut ergo corpus grave ſuper plano horizontali motu progreſſivo incedere poſſit, perpendiculum OP ex centro inertiae corporis O in planum demiſſum non ſolum intra baſin AB cadere, ſed etiam a termino baſis anteriori B tanto intervallo BP remotum eſſe debet, ut ſit $BP > \delta$. OP.

COROLL. 2.

983. Ductis igitur ex centro inertiae O cum perpendiculari OP, tum ad anteriorem baſis terminum B recta OB, angulum BOP majorem eſſe oportet angulo, cujus tangens eſt $= \delta$. Unde ſi fuerit $\delta = \frac{1}{3}$, angulus BOP major eſſe debet quam 18°, 26′. Sin autem fuerit minor, corpus progrediendo ſimul provolvetur.

COROLL. 3.

984. At ſi corpus motu progreſſivo puro promoveatur, ejus motus erit uniformiter retardatus, et ſimilis ei, quo corpus celeritate c ſurſum projectum aſcenderet, deorſum ſollicitatum vi, quae ſit ad ejus maſſam ut δ ad 1. Hoc tantum diſcrimine, quod hic corpus ad quietem redactum perpetuo in quiete ſit permanſurum.

SCHOLION. 1.

985. Ut tali corpori quieto motus imprimatur, neceſſe eſt ut ſecundum directionem horizontalem impellatur vi, quae major ſit quam δM: quamdiu autem ſollicitatur vi minore, in quiete perſeverabit, niſi forte ad provolutionem incitetur, quod quamdo evenire debeat, accuratius evolvamus. Sollicitetur ergo primo corpus ſecundum directionem horizontalem OS, quae per ejus centrum inertiae O tranſeat, vi $OS = S$, ut ſit $S < \delta M$, et frictio pari vi S ſecundum BA renitetur. An autem circa extremitatem B provolvetur? judicium petetur ex momento frictionis S. OP et momento preſſionis M in B translatae, quod eſt $= M.BP$: hinc ſi fuerit $S.OP > M.BP$, corpus provolvetur, ſin minus, in quiete perſiſtet: quia enim vis ſollicitans $OS = S$ ipſi centro inertiae eſt applicata, ea nihil huc confert. Sit nunc vis S infra centrum

trum inertiae in R applicata, et quia hinc momentum provolutioni contrarium naſcitur = S. OR, ne corpus provolvatur, eſſe oportet S. OR + M. BP > S. OP, ſeu S. PR < M. BP; unde ſimul patet, ſi vis horizontalis S ſublimius in *r* eſſet applicata, corpus provolutioni non fore obnoxium, ſi fuerit S. P*r* < M. BP, ubi quidem aſſumimus eſſe S < ∫M. Idem etiam hinc magis fit perſpicuum, ſi punctum B ut axem fixum, corpusque circa eum mobile ſpectemus, tum enim vis *rv* = S momentum in ſenſum DC eſt = S. P*r*, expondere autem corporis M in O collecto oritur momentum in ſenſum contrarium M. BP: ideoque corpus provolvetur *ſi* S. P*r* > M. BP, quieſcet vero *ſi* S. P*r* < M. BP.

SCHOLION. 2.

986. Sin autem vis *rv* = S major fuerit quam ∫M, motus corpori progreſſivus inducetur ab exceſſu S — ∫M, quia frictio jam tantum vi = ∫M ſecundum directionem BE reluctatur. Utrum autem ſimul corpus ſit motum gyratorium adepturum, nec ne? hoc modo cognoſcetur. Sepoſito nimirum motu progreſſivo, aſſumo corpori alium motum gyratorium imprimi non poſſe, niſi circa axem horizontalem per centrum inertiae O tranſeuntem et ad motus directionem OS normalem, ad quem inveſtigandum, cum baſis punctum B maneat in plano horizontali, ſimul ac punctum A elevari incipit, tota preſſio in puncto B exercetur, ita ut tum in B habeatur vis ſurſum urgens BM = M. Nunc igitur ex viribus *rv* = S, BE = ∫M, OP = M et BM = M colligitur momentum provolutionem producens = S. O*r* + ∫M. PO — M. BP; quare ut corpus ſolo motu progreſſivo feratur, haec conditio requiritur, ut ſit S. O*r* + ∫M. PO < M. BP, ubi per hypotheſin eſt S > ∫M. Si vis horizontalis S infra centrum inertiae in R eſſet applicata, corpus provolutioni non erit obnoxium, ſi fuerit ∫M. PO < M. BP + S. OR ſeu S. OR + M. BP > ∫M. PO. Hinc igitur clare intelligimus, quantum cum amplitudo baſis, ſeu diſtantia perpendiculi ex centro inertiae demiſſi OP ab ejus terminis, tum elevatio centri inertiae ſupra planum horizontale, tum altitudo in qua vis horizontalis applicatur, atque ipſa frictio conferant, ut nulla provolutio ſit metuenda.

PROBLEMA. 3.

987. Si corpus grave ABCD plano inclinato EF imponatur, definire conditiones, ſub quibus id ob frictionem in quiete ſit permanſurum. Fig. 128.

SOLUTIO.

Sit angulus, quem planum inclinatum EF cum horizonte GF conſtituit, GFE $= \zeta$, corporis autem ei impoſiti maſſa $= M$, et centrum inertiae O, baſi autem AB plano inclinato incumbat. Ducatur recta verticalis OQR, ſecundum quam corpus ob gravitatem ſollicitari cenſendum eſt vi $= M$, quae reſolvatur ſecundum directiones OP et OC, quarum illa in planum EF ſit normalis, haec vero eidem parallela, et ob angulum POQ $=$ GFE $= \zeta$, erit vis OP $= M$ *cof* ζ et vis OC $= M$ *ſin* ζ. Illa autem vi OP corpus ad planum EF apprimitur, unde ſi moveretur, frictio foret $= \delta M$ *cof* ζ: hac vero vi OC $= M$ *ſi* ζ ad motum ſecundum plani inclinati EF directionem ſollicitatur. Niſi ergo haec vis M *ſi* ζ major ſit, quam δM *cof* ζ, corpus nullum motum progreſſivum adipiſcetur; quare ut corpus quieſcat, neceſſe eſt, ſit M *ſi* $\zeta < \delta M$ *cof* ζ ſeu *tang* $\zeta < \delta$. Prima ergo conditio ad conſervationem quietis neceſſaria exigit, ut anguli inclinationis F $= \zeta$ tangens minor ſit quam fractio δ qua frictio determinatur. Deinde manifeſto requiritur, ut recta verticalis OQ intra baſin AB cadat. Nam ne corpus circa baſis extremitatem B provolvatur, neceſſe eſt, ut vis OQ $= M$ momentum reſpectu puncti B, quod eſt M. BQ *cof* ζ ſit poſitivum, ideoque BQ poſitivum, ſeu punctum Q intra baſin AB cadere debet. Quod etiam ex motu gyratorio circa O generando ita oſtendi poteſt. Fingamus enim corpus jam talem motum gyratorium incipere, et dum punctum A elevatur, tota preſſio M *cof* ζ in B transferetur, ut nunc corpus in B ſollicitetur primo vi BM $= M$ *cof* ζ, ob frictionem autem vi BA $= M$ *ſi* ζ, ex quibus momentum generans motum gyratorium erit $= M$ *ſi* ζ. OP $- M$ *cof* ζ BP. Quare ne talis motus oriatur, debet eſſe BP *cof* $\zeta >$ OP. *ſi* ζ ſeu BP $>$ OP *tang* ζ, at OP *tang* $\zeta =$ PQ, ergo ob BP $>$ PQ intervallum BQ poſitivum eſſe oportet. Conſequenter ut corpus ABCD plano inclinato EF impoſitum quieſcat, primo requiritur, ut verticalis OQ intra baſin AB cadat, deinde ut tangens anguli inclinationis F minor ſit quam δ.

COROLL. 1.

988. Hinc igitur facillimum modum nanciſcimur, explorandi frictionem ſeu fractionem δ: planum enim EF eousque elevetur, quoad corpus ſuper eo deſcendere incipiat, et tangens anguli maximi F, quo corpus etiamnum in quiete perſiſtit, dabit valorem fractionis δ.

CO-

COROLL. 2.

989. Quodſi fuerit $\delta = \frac{1}{3}$, corpus tamdiu in quiete permanebit, quamdiu angulus elevationis GFE non ſuperat 18°, 26′. Sin autem ſit $\delta = \frac{1}{4}$, hunc angulum minorem eſſe oportet, quam 14°, 2′, ſicque viciſſim ex hoc angulo valor ipſius δ innoteſcit.

COROLL. 3.

990. Ut autem corpus ſuper plano inclinato quieſcat, non ſufficit ut ſit *tang* GFE $< \delta$, ſed etiam baſis corporis tum ampla eſſe debet, ut ſit BP $>$ OP *tang* GFE; ſeu ut angulus BOP major ſit quam angulus GFE.

SCHOLION.

991. In figura repraeſentatur ſectio corporis verticalis per ejus centrum inertiae O facta, quae ſimul ad planum inclinatum ſit normalis; in qua propterea recta OP ad id eſt perpendicularis, et OC ſit directio motus progreſſivi, quem gravitas corpori imprimere conatur. Ex dictis autem manifeſtum eſt, motum progreſſivum coerceri, ſi fuerit *tang* F $< \delta$. Verum ad judicium expediendum, num corpus motum gyratorium ſit accepturum, non ſufficit ad ſolam ſectionem ABCD ejusque baſin AB ſpectare, cum fieri poſſet, ut in hac ſectione corpus plano nusquam incumberet, ſed contactus in extremitatibus corporis tantum exiſteret. Tum igitur univerſus contactus conſiderari ac diſpici debet, quomodo et circa quamnam lineam provolutio oriri poſſit, quae utique ex figura baſis eſt dijudicanda. Quodſi ergo corpora tam irregularia adhibeantur, ut hoc judicium nimis difficile evadat, experientiam conſulere conveniet, an corpus ad provolutionem ſit proclive? prior vero concluſio de angulo F manet, et ab hac irregularitate neutiquam pendet.

PROBLEMA. 4.

992. Si elevatio plani inclinati EF major fuerit, quam ut grave ei incumbens ABCD in quiete perſiſtere poſſit, definire conditiones, quibus id ſolo motu progreſſivo ſuper plano inclinato EF ſit deſcenſurum.

SOLUTIO.

Sit maſſa, idemque pondus corporis $= M$, et ejus centrum inertiae O ut ante, atque δ exponens frictionis. Vocato ergo angulo elevationis GFE $= \zeta$, erit per hypotheſin *tang* $\zeta > \delta$. Iam ex vi gra- Fig. 128.

vitatis OQR = M colligimus preſſionem in planum inclinatum, ſeu vim OP = M *cof* ζ, et vim ad deſcenſum ſollicitantem OC = M *ſi* ζ. Cum igitur frictio ei renitatur vi = δM *cof* ζ, corpus revera ad deſcenſum incitabitur exceſſu virium M *ſi* ζ − δM *cof* ζ = M (*ſi* − δ *cof* ζ), a qua motus progreſſivus producetur, dummodo praeterea in corpore nullus motus gyratorius generetur. Videamus ergo, ſub quibusnam conditionibus corpori motus gyratorius circa axem horizontalem et ad planum COP normalem per centrum inertiae O ductum generari poſſit; ſtatim autem ac talis motus incipit, tota preſſio M *cof* ζ in B transfertur, ita ut nunc corpus ſollicitetur a vi BM = M *cof* ζ, et ob frictionem a vi BA = δM *cof* ζ, unde momentum gyrationem in ſenſum BADC generans eſt = δM *cof* ζ . OP − M *cof* ζ. BP. Quare ne corpus provolutioni ſit obnoxium, oportet hanc quantitatem eſſe negativam, ideoque BP > δ OP. ſeu *tang* BOP > δ.

COROLL. 1.

993. Quia conditio inventa *tang* BOP > δ non pendet ab inclinatione plani EF, ſi corpus in minori inclinatione provolutioni non fuerit obnoxium, etiam in majori elevatione nulla provolutio erit metuenda.

COROLL. 2.

994. Quodſi ergo fuerit $\delta = \frac{1}{3}$, dummodo angulus BOP major ſit quam 18°, 26′, corpus nullum motum volutorium accipiet, ſed ſuper plano inclinato vel quieſcet, vel ſolo motu progreſſivo deſcendet.

SCHOLION.

995. In hoc autem judicio pro puncto B non tam extremitas in ipſa ſectione ABCD per centrum inertiae O facta eſt ſumenda, ſed in tota baſi, qua fit contactus, linea per terminos a puncto P maxime remotos ducta eſt intelligenda, cujus a P diſtantia pro intervallo PB accipi debet.

PROBLEMA. 5.

996. Si corpus ita fuerit comparatum, ut nulla provolutio ſit metuenda, ejus motum deſcenſus ſuper plano inclinato EF determinare.

SOLUTIO.

Poſita corporis maſſa eodemque pondere = M, et elevatione plani ſupra horizontem ſeu angulo GFE = ζ, ut ſit *tang* ζ > δ, quia alio-

alioquin corpus in quiete perſeveraret. Confecerit jam corpus tempore $= t$ ſuper plano inclinato ſpatium $= s$, motu ſcilicet a quiete inchoato, et quia vis accelerans eſt $= M \mathfrak{ſi} \zeta$, a gravitate oriunda, retardans autem $= \delta M \mathfrak{cof} \zeta$ a frictione profecta, hinc nanciſcimur iſtam aequationem: $\frac{dds}{2gdt^2} = \frac{M\mathfrak{ſi}\zeta - \delta M \mathfrak{cof}\zeta}{M} = \mathfrak{ſi}\zeta - \delta \mathfrak{cof}\zeta$,

hincque integrando $\frac{ds}{dt} = 2gt\,(\mathfrak{ſi}\zeta - \delta \mathfrak{cof}\zeta)$, quae eſt celeritas corporis hoc tempore t acquiſita, ipſum autem ſpatium interea confectum fit $s = g\,tt\,(\mathfrak{ſi}\zeta - \delta \mathfrak{cof}\zeta)$.

COROLL. 1.

997. Frictio ergo non impedit, quo minus corpus ſuper plano inclinato deſcendat motu uniformiter accelerato, cum celeritates in ratione temporum creſcant: verum in multo minore ratione creſcunt; ſublata enim frictione foret $s = gtt\,\mathfrak{ſi}\zeta$.

COROLL. 2.

998. Si obſervetur tempus t quo datum ſpatium s fuerit confectum, ſimulque elevatio plani ſeu angulus ζ fuerit exploratus, inde exponens frictionis δ colligi poterit: erit enim $\delta = tang\,\zeta - \frac{s}{gtt\,\mathfrak{cof}\zeta}$.

SCHOLION.

999. Hoc modo explorari poterit, utrum pro quiete idem valor exponentis δ reperiatur, ac pro motu eoque ſive celeriore ſive tardiore: ſed hujusmodi experimenta ſunt lubrica, quia exiguus error in obſervatione temporis t commiſſus multum turbat. Tum vero etiam reſiſtentiae aeris ratio eſt habenda, quae praeſertim in motibus velocioribus inſigne momentum afferre poteſt. Quare nonniſi plurimis hujusmodi experimentis ſumma cura inſtitutis quicquam certi in hoc negotio concludi poterit. Ne autem reſiſtentia aeris moram faceſſat, planum non multum ultra ſtatum quietis elevari convenit, quia in motibus tardioribus ejus effectus eſt minimus. Tum vero corpus quantum fieri poteſt, ponderoſum efficiatur, fruſtum plumbi intra ejus volumen includendo, ut tamen baſis ex ea conſtet materia, cujus frictionem explorare lubet.

EXEM-

EXEMPLUM.

1000. Ponamus tabulae EF longitudinem esse 6 ped. Rehn. tempusque t observari, quo corpus descendendo totam hanc longitudinem conficiat, ac videamus, quantum discrimen in tempore t frictione δ parumper mutata oriri debeat. Cum igitur sit $g = 15\frac{5}{8}$ ped. Rhen. erit tempus descensus $t = \gamma\frac{48}{125(\sin\zeta - \delta\cos\zeta)}$.

Ponamus $\delta = \frac{1}{3}$, et angulum $\zeta = 20°$, quia debet esse $tang\ \zeta > \frac{1}{3}$, ac reperietur tempus descensus $t = 3$, 652 min. sec. seu $t = 3\frac{2}{3}$ sec. proxime.

Sit jam δ aliquantulum majus, nempe $\delta = \frac{1}{3} + \frac{1}{1000}$, manente $\zeta = 20°$, et prodit tempus $t = 4, 45 = 4\frac{9}{20}$ sec.

At si esset $\delta = \frac{1}{3} - \frac{1}{1000}$ manente $\zeta = 20°$, invenitur tempus $t = 3, 171 = 3\frac{1}{6}$ sec.

Pars igitur centesima unitatis in valore ipsius δ gignit temporis discrimen illo casu $\frac{4}{5}$ sec. hoc vero tantum $\frac{1}{2}$ sec. unde in observatione temporis valde attentum esse oportet. Si plano minor tribuatur elevatio, ut motus multo lentior oriatur, dubium est, an observationibus multum confidere queamus. Levissima enim inaequalitas in superficie descensum vehementer perturbare valebit, ita ut si experimentum idem aliquoties repetatur, phaenomena multum discrepare possint. Atque hanc ob causam, etsi hic calculum hypothesi de frictione stabilitae superstruo, tamen si conclusiones inde deductas cum experientia conferre velimus, minime perfectum consensum expectare debemus,

CAPUT. III.

DE MOTU GYRATORIO CORPORUM GRAVIUM CIRCA AXEM FIXUM A FRICTIONE RETARDATO.

PROBLEMA. 6.

1001. Efficere ut corpus circa axem fixum per ejus centrum inertiae transeuntem gyrari possit.

SO-

SOLUTIO.

Si corpus debeat gyrari circa axem GG, neceſſe eſt, ut utrinque inſtructum ſit terminis cylindricis CEFD, quos axis GG medium trajiciat, ita ut utriusque cylindri axis exiſtat: atque hic quidem aſſumo, hunc axem GG per corporis centrum inertiae I tranſire, quanquam eadem ſtructura eſt obſervanda, ſi recta GG non per corporis centrum gravitatis tranſite debeat. Ut jam durante motu gyratorio haec recta GG fixa maneat, id pluribus modis obtineri poteſt. Primo hi termini cylindrici annulis fixis ejusdem amplitudinis inſeri poſſunt, intra quas libere, frictione ſaltem excepta, converti queant: verum ſi amplitudo annulorum non excedat amplitudinem cylindricorum CEFD, verendum eſt, ne ob nimis arctam inſertionem ingens reſiſtentia oriatur, ac ſi termini illi cylindrici vel minimum intumeſcant, motus omnis coerceatur. Fig. 129.

Deinde termini cylindrici utrinque canali MLN in figuram quadrati excavato imponi poſſunt, ut contactus tantum in tribus punctis E, H, F fiat; dum enim corpus intra has cavitates circumvolvitur, axis GG manet immotus. Ne autem motus nimis impediatur, non opus eſt, ut ambo parietes verticales M et N cylindrum tangant, ſed majore intervallo a ſe invicem diſtare poſſunt. Statim enim atque corpus gyratur, cylindrici termini ſe alterutri parieti applicabunt, perindeque eſt, ac ſi alter abeſſet; qui tantum ideo adjicitur, ut corpus ſi forte in ſenſum contrarium gyretur, ſe ei pari modo applicare poſſit. Fig. 130.

Tertio termini cylindrici etiam utrinque cavitati MLN, ex duobus planis inclinatis ML et NL efformatae, imponi poſſunt; hoc modo contactus perpetuo fiet in duobus punctis E et F, axisque GG manebit in quiete; dummodo inclinatio illorum planorum tanta ſit, ut termini cylindrici ſuper illis non aſcendant, quam conditionem deinceps inveſtigabimus. Fig. 131.

Quarto imponi etiam poſſunt ambo termini cylindrici fulcris in figuram circularem MLN excavatis, quibus quidem corpus dum quieſcit ita incumbit, ut contactus fiat in imo puncto H. Quando autem gyratur, contactus fiet in alio puncto elevato, quod cum perpetuo maneat idem, uti oſtendemus, axis GG, quamdiu motus gyratorius in eundem ſenſum durat, manebit immotus. Hic ſufficit radium circuli MLM majorem fuiſſe radio termini cylindrici, ſed tanta profunditas huic cavitati tribui debet, ut non ſit verendum, ne corpus ſupra ejus oras M et N tranſiliat. Fig. 132.

COROLL. 1.

1002. Dum corpus hoc modo utrinque talibus cavitatibus incumbit, ob pondus ſuum eas premet: ac ſi centrum inertiae I in medio verſetur, utrinque preſſio aequalis exeretur: ſin autem id non fuerit in medio, preſſiones erunt diſtantiis reciproce aequales, ita ut ſumma ſit toti ponderi aequalis.

COROLL. 2.

1003. Quodſi autem corpus gyretur, preſſio non amplius a ſolo pondere corporis pendet, ſed ob ipſam frictionem immutabitur, ideoque ex frictionis ratione determinari debet, unde etiam ultimo caſu punctum contactus eſt definiendum.

SCHOLION.

1004. Preſſio etiam, ideoque et frictio, plurimum perturbatur a viribus, quibus corpus dum gyratur, praeter gravitatem ſollicitatur. Quare quo hoc argumentum dilucide pertractemus, primo mentem ab hujusmodi viribus abſtrahamus, corpusque tantum grave ſpectemus, cui initio motus gyratorius fuerit impreſſus; et quantum is ob frictionem retardari debeat, indagemus. Tum vero etiam aſſumamus, axem gyrationis GG per centrum inertiae corporis I tranſire, ab eoque ambos terminos aeque eſſe remotos, ita ut corpus utrinque ſibi ſit ſimile. Quin etiam ne vires obliquae calculum turbent, ſtatuamus, rectam GG ſimul eſſe axem principalem corporis. Minime enim conſultum videtur, corpori figuram nimis irregularem tribuendo, inveſtigationes noſtras difficilibus calculis implicare, cum ipſa principia hactenus ſtabilita etiam his caſibus evolvendis ſufficiant, ſi quis laborem ſuſcipere voluerit. Caſus autem fig. 130. repraeſentatus in fig. 131. continetur, dum alterum planum ſit verticale et alterum horizontale; deinde vero etiam caſum fig. 132. ex eo dijudicari poſſe videbimus.

PROBLEMA. 7.

Fig. 133. 1005. Si corporis (in fig. 129. repraeſentati) termini cylindrici utrinque inter duo plana utcunque inclinata ML et NL ſuſtententur, corpusque in gyrum agatur celeritate quacunque, definire frictionem ejusque effectum in motu corporis retardando.

SO-

SOLUTIO.

Quia centrum inertiae I in medio axis GG ſitum aſſumimus, reſpectu terminorum cylindricorum utrinque omnia erunt paria. Sit igitur pro altero termino radius baſis circularis $GE = GF = f$, et puncta contactus in E et F. Ducta verticali GH ponantur anguli $EGH = \zeta$ et $FGH = \eta$, quibus poſitio planorum ML et NL determinantur: tum vero corpus jam elapſo tempore t gyretur in ſenſum EF celeritate angulari $= \varkappa$, quae initio fuerit $= \varepsilon$. Quia ergo ex hac parte corpus in punctis E et F ſuſtinetur, ſint E et F preſſiones, quibus corpus planis innititur, ac viciſſim ſecundum directiones eo normales EG et FG urgetur. Frictio porro in punctis E et F, ubi fit attritus, ita ſe exeret, ut in E corpus ſollicitetur vi ſec. $EM = \delta E$ et in F vi ſec. $FL = \delta F$, ita ut ex hac parte quatuor habeantur vires.

vis $EG = E$; vis $EM = \delta E$; vis $FG = F$; vis $FL = \delta F$,

totidemque pares ex altera parte. Poſita ergo maſſa eodemque pondere corporis $= M$, quia omnis motus progreſſivus excluditur, hae vires centro inertiae applicatae ſe mutuo deſtruere debent: Colligitur autem ex iſtis quaternis viribus vis verticaliter ſurſum tendens

$$E \cos\zeta + F \cos\eta + \delta E \sin\zeta - \delta F \sin\eta$$

et vis horizontalis dextorſum directa

$$E \sin\zeta - F \sin\eta - \delta E \cos\zeta - \delta F \cos\eta,$$

ubi haec debet evaneſcere, illa autem dimidio ponderi corporis aequari. Hinc nanciſcimur:

$$E \sin\zeta - F \sin\eta = \delta (E \cos\zeta + F \cos\eta) \text{ et}$$
$$(1 + \delta\delta)(E \cos\zeta + F \cos\eta) = \tfrac{1}{2} M, \text{ ideoque}$$
$$E \cos\zeta + F \cos\eta = \frac{M}{2(1+\delta\delta)} \text{ et}$$
$$E \sin\zeta - F \sin\eta = \frac{M\delta}{2(1+\delta\delta)}$$

ex quibus elicitur

$$E = \frac{M(\sin\eta + \delta\cos\eta)}{2(1+\delta\delta)\sin(\zeta+\eta)}; \quad F = \frac{M(\sin\zeta - \delta\cos\zeta)}{2(1+\delta\delta)\sin(\zeta+\eta)}$$

ubi ſtatim eſt obſervandum, cum vires E et F negative eſſe nequeant, neceſſario eſſe oportere $\sin\zeta > \delta\cos\zeta$ ſeu $\tang\zeta > \delta$.

Nunc denique colligantur momenta ex frictione nata, quae erunt

$$\delta(E+F)f = \frac{M\delta f(\sin\zeta + \sin\eta - \delta\cos\zeta + \delta\cos\eta)}{2(1+\delta\delta)\sin(\zeta+\eta)}$$ cujus duplum motui

 opponitur.

opponitur. Quare si momentum inertiae corporis respectu axis GG fuerit $= Maa$, habebimus hanc aequationem:

$$\frac{d\omega}{2g\,dt} = \frac{-\delta f(\sin\zeta + \sin\eta - \delta\cos\zeta + \delta\cos\eta)}{(1+\delta\delta)aa\sin(\zeta+\eta)}, \text{ et integrando}$$

$$\omega = 1 - \frac{2\delta f g t(\sin\zeta + \sin\eta - \delta\cos\zeta + \delta\cos\eta)}{(1+\delta\delta)aa\sin(\zeta+\eta)}.$$

COROLL. 1.

1006. Quo minor ergo est f, seu quo graciliores termini cylindrici, eo minor est effectus frictionis. Sed hos terminos non pro lubitu diminuere licet, quia eos satis fortes esse oportet ad onus gestandum, atque quantitas f fere rationem subduplicatam ponderis M sequi debet.

COROLL. 2.

1007. Si sit $\zeta = 90$ et $\eta = 0$, qui est casus fig. 130. momentum frictionis est $= \frac{M\delta(1+\delta)f}{1+\delta\delta}$; Sin autem sit $\eta = \zeta$, seu plana ML et NL aequaliter ad horizontem inclinata, erit momentum frictionis $= \frac{2M\delta f \sin\zeta}{(1+\delta\delta)\sin 2\zeta} = \frac{M\delta f}{(1+\delta\delta)\cos\zeta}$: ubi debet esse $tang\,\zeta > \delta$.

COROLL. 3.

1008. Minimum autem fit momentum frictionis sumendo $tang\,\zeta = \delta$, tum enim ob $F = 0$, erit $E = \frac{M}{2(1+\delta\delta)\cos\zeta} = \frac{M}{2r(1+\delta\delta)}$ ideoque momentum frictionis $= \frac{M\delta f}{r(1+\delta\delta)}$. Hoc ergo casu corpus soli plano ML innititur, et alterum NL plane non in computum venit.

COROLL. 4.

1009. Hinc casus fig. 132. quaecunque sit cavitatis MLN figura facile evolvitur. Termini enim cylindrici puncto O applicabuntur, ubi tangens cum horizonte facit angulum, cujus tangens est $= \delta$, eritque momentum frictionis $= \frac{M\delta f}{r(1+\delta\delta)}$.

SCHO-

SCHOLION.

1010. Terminos ergo cylindricos ita ſuſtentari convenit, ut contactus utrinque in unico fiat puncto, quia tum momentum frictionis minimum redditur: quem in finem eos cavitatibus MLN (fig. 132.) imponi expediet, quae in formam ſemicirculi craſſitiem non multum ſuperantis ſint excavatae, ne ſitus, quem in motu obtinent, multum diſcrepet a ſitu quietis. Tum vero hos terminos cylindricos quam maxime tenues effici oportet, quantum quidem eorum firmitas ratione ponderis geſtandi permittit. Praeterea etiam hi termini oleo aliave materia lubrica inungi ſolent, quo magis attritus diminuatur, fractionique minor valor concilietur. Interim tamen caſu, quem ſumus contemplati, motus mox extinguetur, quod fiet elapſo tempore

$$t = \frac{\varepsilon(1+\delta\delta)\,a\,a\,\beta(\zeta+\eta)}{2\delta f g(\sin\zeta+\sin\eta-\delta\cos\zeta+\delta\cos\eta)}.$$

Quando autem vires adhibentur, ad motum conſervandum, ex iisdem principiis earum quantitas definiri poteſt, ut motus maneat uniformis. Quin etiam hujusmodi machinae, dum in gyrum aguntur, ad onera elevanda inſtrui ſolent, quae operatio ut motu uniformi perficiatur, tantis viribus opus eſt, quae non ſolum oneris reſiſtentiam, ſed etiam frictionem ſuperare valeant; quem caſum, cum in vita communi frequentiſſime occurrat, hic evolvamus.

PROBLEMA. 8.

1011. Si cylindrus (fig. 129.) adhibeatur ad onus quodpiam elevandum, determinare vires ei applicandas, ut habita frictionis ratione motus ſervetur uniformis.

SOLUTIO.

Incumbat alter terminus cylindricus, cujus radius $GE = GF = f$ Fig. 134. binis planis inclinatis ML et NL, quae cum horizonte angulos faciant ζ et η, quibus aequales erunt anguli, quos radii GE et GF ad puncta contactus E et F ducti cum recta verticali GH faciunt. Dum autem corpus in ſenſum EF gyratur, ope cordae in medio circumvolutae elevet onus $= Q$, quod pondere ſuo $= Q$ vecti horizontali $GS = s$ ſecundum directionem verticalem SQ motui reluctetur. Tum vero radio $GR = r$, a verticali GA declinanti angulo $AGR = \theta$ jugiter applicata ſit vis $RP = P$ ad eum normalis, cujus quantitas quaeritur, ut motus maneat uniformis exiſtente celeritate angulari circa axem $GG = \omega$. Quod-

ſi jam pondus ipſius corporis, per cujus centrum inertiae axis gyrationis GG tranſit, ponatur ut ante = M, et vires quibus alter terminus cylindricus a planis, quibus in E et F incumbit, repellitur, ſecundum EG = E et ſecundum FG = F, unde frictiones naſcuntur ſecundum EM = δE et ſecundum FL = δF, ſupra vidimus, hinc oriri vim verticaliter ſurſum tendentem $E \cos\zeta + F \cos\eta + \delta (E \sin\zeta - F \sin\eta)$, et vim horizontalem dextorſum directam $= E \sin\zeta - F \sin\eta - \delta (E \cos\zeta + F \cos\eta)$, quas ob binos terminos cylindricos duplicari oportet. Deinde ex pondere ipſius corporis habemus vim verticaliter deorſum nitentem = M et ex onere elevando vim = Q. Ex vi ſollicitante P vero oritur vis deorſum urgens $= P \sin\theta$, et vis horizontaliter ſiniſtrorſum $= P \cos\theta$: quae vires cum ſe mutuo debeant deſtruere, obtinebimus has aequationes:

$$E \cos\zeta + F \cos\eta + \delta (E \sin\zeta - F \sin\eta) = \tfrac{1}{2} M + \tfrac{1}{2} Q + \tfrac{1}{2} P \sin\theta$$
$$E \sin\zeta - F \sin\eta - \delta (E \cos\zeta + F \cos\eta) = \tfrac{1}{2} P \cos\theta$$

unde colligimus

$$E \cos\zeta + F \cos\eta = \frac{M + Q + P \sin\theta - \delta P \cos\theta}{2(1+\delta\delta)}$$

$$E \sin\zeta - F \sin\eta = \frac{M\delta + Q\delta + P\delta \sin\theta + P \cos\theta}{2(1+\delta\delta)}$$

hincque porro

$$E = \frac{M(\sin\eta + \delta\cos\eta) + Q(\sin\eta + \delta\cos\eta) + P(\sin\eta + \delta\cos\eta)\sin\theta + P(\cos\eta - \delta\sin\eta)\cos\theta}{2(1+\delta\delta)\sin(\zeta+\eta)}$$

$$F = \frac{(M + Q + P\sin\theta)(\sin\zeta - \delta\cos\zeta) - P(\cos\zeta + \delta\sin\zeta)\cos\theta}{2(1+\delta\delta)\sin(\zeta+\eta)}.$$

Praeterea vero, quia motum uniformem deſideramus, momenta virium reſpectu axis gyrationis ſe deſtruere debent. Eſt autem momentum accelerans = Pr, et momenta oppoſita $= 2\delta (E + F) f + Qs$, unde neceſſe eſt ſit $Pr = 2\delta (E + F) f + Qs$, ideoque

$$Pr - Qs = \frac{\delta(M + Q + P\sin\theta)(\sin\zeta + \sin\eta - \delta\cos\zeta + \delta\cos\eta) + \delta P(\cos\eta - \cos\zeta - \delta\sin\eta - \delta\sin\zeta)\cos\theta}{(1+\delta\delta)\sin(\zeta+\eta)} f$$

hincque vim ſollicitantem P definire licet.

Quodſi jam ponamus terminos cylindricos in cavitatibus circularibus ſuſtineri, ut contactus unico loco fiat, ubi ſcilicet tangens ad horizontem inclinetur angulo = ζ: erit F = 0, ideoque

$$(M + Q + P\sin\theta - \delta P\cos\theta)\, tang\,\zeta = \delta (M + Q + P\sin\theta) + P\cos\theta$$

et

et $E = \frac{M + Q + P \sin\theta - \delta P \cos\theta}{2(1+\delta\delta)\cos\zeta}$.

Inde colligitur $P = \frac{(M+Q)(\delta - tang\,\zeta)}{(\sin\theta - \delta\cos\theta)\,tang\,\zeta - \cos\theta - \delta\sin\theta}$

quo valore in poſtrema aequatione, quae fit $Pr - Qs = 2\delta Ef$, ſubſtituto prodet

$$(M+Q)\,\delta f\cos\theta = (M+Q)\,r\,(\sin\zeta - \delta\cos\zeta) + Qs\,((\sin\theta - \delta\cos\theta)\sin\zeta - (\cos\theta + \delta\sin\theta)\cos\zeta)$$

ubi ſi ponamus $\delta = tang\,\lambda$, haec aequatio erit

$$(M+Q)\,f\sin\lambda\cos\theta = (M+Q)\,r\sin(\zeta - \lambda) - Qs\cos(\zeta + \theta - \lambda)$$

unde angulus ζ erui debet, quo invento erit

$$P = \frac{(M+Q)\sin(\zeta - \lambda)}{\cos(\zeta + \theta - \lambda)}$$

ſeu $P = \frac{Qs}{r} + \frac{(M+Q)f\sin\lambda\cos\theta}{r\cos(\zeta+\theta-\lambda)}$.

COROLL. 1.

1012. Si terminus cylindricus unico loco incumbat in alveolo cavo, pro P ſubſtituto valore prodit preſſio in eo loco $E = \frac{(M+Q)\cos\theta}{2(1+\delta\delta)\cos\lambda\cos(\zeta+\theta-\lambda)} = \frac{(M+Q)\cos\lambda\cos\theta}{2\cos(\zeta+\theta-\lambda)}$ poſito $\delta = tang\,\lambda$. Haec ergo preſſio evaneſcit caſu $\cos\theta = 0$, niſi ſimul fiat $\cos(\zeta+\theta-\lambda) = 0$.

COROLL. 2.

1013. Poſito autem $\theta = 90°$, erit

$$(M+Q)\,r\sin(\zeta - \lambda) + Qs\sin(\zeta - \lambda) = 0$$

quo ergo caſu fit $\zeta = \lambda$ ſeu $tang\,\zeta = \delta$, et $P = \frac{Qs}{r} + \frac{(M+Q)ff\sin\lambda}{r}$.

°. Cum autem ſit $E = \frac{M+Q+P}{2(1+\delta\delta)\cos\lambda}$, erit $Pr - Qs = \frac{\delta(M+Q+P)f}{(1+\delta\delta)\cos\lambda}$

$= (M+Q+P)\,f\sin\lambda$ et $P = \frac{Qs + (M+Q)ff\sin\lambda}{r - ff\sin\lambda}$.

CO-

COROLL. 3.

1014. Si ponamus $\theta = -90°$, primo ob $F = 0$ habemus

$$(M + Q - P)\, tang\, \zeta = \delta\,(M + Q - P)$$

tum vero cum sit $E = \frac{M+Q-P}{2(1+\delta\delta)\,cos\,\zeta}$, erit

$$Pr - Qs = \frac{\delta f\,(M+Q-P)}{(1+\delta\delta)\,cos\,\zeta}.$$

Quare si capiatur $P = M + Q$, pressio ideoque et frictio evanescit, sumique oportet $r = \frac{Qs}{M+Q}$.

COROLL. 4.

1015. Nisi autem hoc casu $\theta = -90°$ statuatur $P = M + Q$, erit $tang\, \zeta = \delta$, et $Pr - Qs = \frac{\delta f\,(M+Q-P)}{r\,(1+\delta\delta)} = f\,(M+Q-P)\,sin\,\lambda$ hinc-que $P = \frac{Qs+(M+Q)f\,sin\,\lambda}{r+f\,sin\,\lambda}$. At r ita sumi oportet, ut valor ipsius E ne fiat negativus. Hoc enim casu sustentatio ex opposito fieret, ibique frictio oriretur.

SCHOLION. 1.

1016. Hoc ergo modo frictio penitus tolli posset, vim P ita applicando, ut cum pondere corporis M et onere Q aequilibrium constituat. Verum hic casus in praxi parum utilitatis haberet, quia termini cylindrici intra alveos suos, quos ipsis ampliores esse oportet, hinc inde vacillarent, quo incommodo motus magis quam frictione impediretur. Deinde vero pleraeque hujus generis machinae ita disponi solent, ut vis sollicitans P multo sit minor quam onus elevandum Q, ideoque multo magis $P < M + Q$. Si enim vim oneri aequalem impendere velimus, negotium sine machina absolvi posset, unde non mirum hoc casu frictionis lucrum obtineri posse. Ac si vis P pro data sumatur, ex nostris formulis elicitur r, pro loco applicationis: unde si celeritas angularis machinae sit $= \varepsilon$, onus elevabitur celeritate εs, vis vero sollicitans aget celeritate $= \varepsilon r$. Nisi ergo frictio motum impediret, foret $P\varepsilon r = Q\varepsilon s$, nunc autem ob frictionem erit $P\varepsilon r - Q\varepsilon s = 2\delta\varepsilon Ef$: ubi observari convenit, denotare $P\varepsilon r$ actionem vis sollicitantis, $Q\varepsilon s$ vero quantitatem effectus uno minuto secundo producti, cum εr et

εs

ri ſint ſpatia uno minuto ſecundo confecta. Verum haec ad Theoriam machinarum ſunt referenda, quam ſeorſim pertractari convenit.

SCHOLION. 2.

1017. Si vis ſollicitans P cum angulo θ fuerit data, quaeraturque diſtantia applicationis ſeu longitudo vectis $GR = r$, ex prima aequatione ſtatim colligitur angulus ζ ſeu punctum E, ubi in cavitate fiet contactus, ſcilicet:

$$tang\,\zeta = \frac{\delta(M+Q+P\,ſi\,\theta)+P\,coſ\,\theta}{M+Q+P\,ſi\,\theta-\delta P\,coſ\,\theta};$$

ad quem cognoſcendum ſtatuantur duo anguli λ et ξ ut ſit

$$tang\,\lambda = \delta \text{ et } tang\,\xi = \frac{P\,coſ\,\theta}{M+Q+P\,ſi\,\theta}$$

eritque $tang\,\zeta = \frac{tang\,\lambda+tang\,\xi}{1-tang\,\lambda\,tang\,\xi}$ ideoque $\zeta = \lambda+\xi$.

Unde patet fore $\zeta > \lambda$, ſi $coſ\,\theta > 0$, hoc eſt, ſi recta GR ſurſum vergat, ſin autem deorſum dirigatur, fore $\zeta < \lambda$, quo caſu fieri poteſt, ut contactus fiat in infimo puncto, ſi ſcilicet fuerit $P = \frac{\delta(M+Q)}{-coſ\,\theta-\delta\,ſi\,\theta}$.

Tum vero habebitur preſſio $E = \frac{(M+Q+P\,ſi\,\theta-\delta\,P\,coſ\,\theta)\,coſ\,\lambda^2}{2\,coſ(\lambda+\xi)}$ ſeu

$$E = \frac{P\,coſ\,\lambda\,coſ\,\theta}{2\,ſi\,\xi} = \tfrac{1}{2}\,coſ\,\lambda.\,r\,((M+Q)^2+2P\,(M+Q)\,ſi\,\theta+PP)$$

hincque tandem concluditur longitudo vectis

$$GR = r = \frac{Qs}{P} + \frac{f\,ſi\,\lambda}{P}.\,r\,((M+Q)^2+2P\,(M+Q)\,ſi\,\theta+PP).$$

Ut igitur pro eadem vi ſollicitante P preſſio E ideoque et frictio fiat minima, angulum θ eſſe oportet $= -90°$, ſeu vectem GR in ipſo radio GS capi convenit, quo caſu fit, ut jam vidimus, $\xi = 0$, hincque $\zeta = \lambda$, et $E = \frac{1}{2}(M+Q-P)\,coſ\,\lambda$

atque $GR = r = \frac{Qs}{P} + \frac{f(M+Q-P)\,ſi\,\lambda}{P}$.

Inveſtigemus nunc etiam motum penduli, terminis cylindricis ſimili modo ſuſpenſi, qui ſcilicet utrinque binis planis inclinatis incumbant:

et quia hic motus eſt reciprocus, iſta plana aequaliter ad horizontem inclinata ſtatui conveniet.

PROBLEMA. 9.

1018. Si pendulum oſcilletur circa axem horizontalem fixum, cujus termini cylindrici utrinque binis planis aequaliter inclinatis incumbant, definire ejus motum ob frictionem perturbatum.

SOLUTIO.

Fig. 135. Sit AEBF baſis alterius termini cylindrici, qui incumbat planis ML et NL ad horizontem inclinatis angulo $= \zeta$ erunt puncta contactus in E et F, ut radii GE et GF cum verticali ABLH angulos conſtituant $= \zeta$, quae omnia ad alteram partem perinde ſe habeant, ut axis gyrationis ſit recta horizontalis GG. Sit porro penduli forma utrinque ſibi ſimilis, ac jam elapſo tempore t declinet penduli centrum inertiae I a ſitu verticali angulo $HGI = \varphi$, unde ad ſitum verticalem accedat celeritate angulari $= \omega$, ita ut motus gyratorius fiat in ſenſum EBF. Sit maſſa tota idemque pondus penduli $= M$, diſtantia $GI = h$, et momentum inertiae ejus reſpectu axis gyrationis $GG = Mkk$. Quod ergo ad actionem gravitatis attinet, totum pondus M in puncto I collectum concipere licet.

Ponatur jam terminorum cylindricorum radius $GE = GF = f$, ſintque vires, quibus ii a planis ſuſtentantur, ſecundum $EG = E$ et ſecundum $GF = F$: unde frictiones erunt ſecundum $EM = \delta E$, et ſecundum $FL = \delta F$.

Ex his autem viribus ut ſupra §. 1005. ubi $\eta = \zeta$ naſcuntur primo vis verticalis ſurſum tendens $= (E + F) \cos\zeta + \delta (E - F) \sin\zeta$ et vis horizontalis dextrorſum directa $= (E - F) \sin\zeta - \delta (E + F) \cos\zeta$. Pondus autem praebet vim deorſum tendentem $= M$.

Unde pro motu progreſſivo ſeu motu centri inertiae I habemus primo vim verticaliter deorſum directam:

$$M - 2(E + F)\cos\zeta - 2\delta(E - F)\sin\zeta = P$$

et vim dextrorſum tendentem horizontalem

$$2(E - F)\sin\zeta - 2\delta(E + F)\cos\zeta = Q.$$

Motus autem hujus, cum celeritas centri inertiae ſit $= h\omega$, celeritas verticalis deorſum tendens eſt $= h\omega \sin\varphi$ et celeritas horizontalis dextrorſum directa $= h\omega \cos\varphi$, unde colligimus:

$$\frac{h\,d\omega \sin\varphi + h\omega\, d\varphi \cos\varphi}{2g\,dt} = \frac{P}{M} \text{ et } \frac{h\,d\omega\cos\varphi - h\omega\, d\varphi \sin\varphi}{2g\,dt} = \frac{Q}{M}$$

ubi

ubi eſt $\gamma dt = -d\varphi$. Deindę cum corpus circa axem fixum GG gyretur, cujus reſpectu eſt momentum virium ad accelerandum $= M\,h\,fi\,\varphi - 2\delta\,(E+F)\,f$, erit

$$\frac{d\gamma}{2g\,dt} = \frac{M\,h\,fi\,\varphi - 2\delta(E+F)f}{Mkk}.$$

Qui valor ſi in illis ſubſtituatur, habebimus

$$\frac{M\,h\,h\,fi\,\varphi^2 - 2\delta(E+F)f\,h\,fi\,\varphi}{Mkk} - \frac{h\gamma\gamma\,cof\,\varphi}{2g} = \frac{P}{M}$$

$$\frac{M\,h\,h\,fi\,\varphi\,cof\,\varphi - 2\delta(E+F)f\,h\,cof\,\varphi}{Mkk} + \frac{h\gamma\gamma\,fi\,\varphi}{2g} = \frac{Q}{M}$$

hincque

$$\frac{M\,h\,h\,fi\,\varphi - 2\delta(E+F)f\,h}{Mkk} = \frac{P\,fi\,\varphi + Q\,cof\,\varphi}{M} \text{ et}$$

$$\frac{h\gamma\gamma}{2g} = \frac{Q\,fi\,\varphi - P\,cof\,\varphi}{M},$$

ex quibus quantitatibus preſſionés E et F definiri debent.
Cum autem ſit $P + \delta Q = M - 2\,(1+\delta\delta)\,(E+F)\,cof\,\zeta$, erit

$$M - 2(1+\delta\delta)(E+F)\,cof\,\zeta = \frac{M\,h\,h\,fi\,\varphi\,(fi\,\varphi + \delta\,cof\,\varphi) - 2\delta(F+F)f\,h\,(fi\,\varphi + \delta\,cof\,\varphi)}{kk}$$

$$- \frac{M\,h\,\gamma\gamma\,(cof\,\varphi - \delta\,fi\,\varphi)}{2g}$$

hincque

$$2\,(E+F)\,((1+\delta\delta)\,kk\,cof\,\zeta - \delta f\,h\,(fi\,\varphi + \delta\,cof\,\varphi) =$$

$$Mkk - M\,h\,h\,fi\,\varphi\,(fi\,\varphi + \delta\,cof\,\varphi) + \frac{M\,h\,k\,k\,\gamma\gamma\,(cof\,\varphi - \delta\,fi\,\varphi)}{2g}$$

unde valor ipſius E + F ſubſtitutus praebet

$$\frac{d\gamma}{2g\,dt} = \frac{(1+\delta\delta)\,h\,cof\,\zeta\,fi\,\varphi - \delta f - \dfrac{\delta f\,h\,\gamma\gamma\,(cof\,\varphi - \delta\,fi\,\varphi)}{2g}}{(1+\delta\delta)\,k\,k\,cof\,\zeta - \delta f\,h\,(fi\,\varphi + \delta\,cof\,\varphi)}$$

ex qua aequatione motus penduli ope formulae $\gamma dt = -d\varphi$ determinari poteſt.

COROLL. 1.

1019. De preſſione in E nullum eſt dubium, quin ea fiat poſitiva; ſed preſſio in F ſequenti modo determinatur.

$$2F((1+\delta\delta)\int 2\zeta + \frac{2\delta fb}{kk}\cos\zeta\cos\varphi - \frac{2\delta\delta fb}{kk}\cos\zeta\int\varphi) =$$

$$M.(\int\zeta - \delta\cos\zeta + \frac{\delta fb}{kk}\cos\varphi) - \frac{Mbb\int\varphi}{kk}(\cos(\zeta-\varphi)+\delta\int(\zeta-\varphi))$$

$$+ \frac{M b\gamma\gamma}{2g}(\int(\zeta-\varphi) - \delta\cos(\zeta-\varphi) + \frac{\delta fb}{kk}\cos 2\varphi)$$

unde valor ipſius F poſitivus prodire debet, quod fit, dum fuerit *tang* $\zeta > \delta$ exiſtente φ angulo parvo.

COROLL. 2.

1020. Si frictio eſſet nulla ſeu $\delta = 0$, foret $\frac{d\gamma}{2g\,dt} = \frac{b\int\varphi}{kk}$, unde motus pendulorum ſupra definitus facile eruitur, pro preſſionibus autem E et F haberemus has aequationes:

$$2(E+F)\,kk\cos\zeta = M\left(kk - bb\int\varphi^2 + \frac{bkk\gamma\gamma\cos\varphi}{2g}\right)$$

$$\text{et } 2Fk^2\int 2\zeta = M\left(kk\int\zeta - bb\int\varphi\cos(\zeta-\varphi) + \frac{bkk\gamma\gamma\int(\zeta-\varphi)}{2g}\right)$$

$$\text{et } 2Ek^2\int 2\zeta = M\left(kk\int\zeta + bb\int\varphi\cos(\zeta+\varphi) + \frac{bkk\gamma\gamma\int(\zeta+\varphi)}{2g}\right)$$

quarum utraque ut ſit poſitiva debet eſſe:

$$tang\,\zeta > \frac{2gbb\int\varphi\cos\varphi + bkk\gamma\gamma\int\varphi}{2gkk - 2gbb\int\varphi^2 + bkk\gamma\gamma\cos\varphi}$$

ubi notandum eſt, eſſe $kk > bb$.

COROLL. 3.

1021. Aequatio differentialis inventa ob $dt = \frac{-d\varphi}{\gamma}$ abit in hanc formam

$$0 = \gamma d\gamma((1+\delta\delta)\,kk\cos\zeta - \delta fb(\int\varphi + \delta\cos\varphi)) - \delta fb\gamma\gamma d\varphi$$
$$(\cos\varphi - \delta\int\varphi)$$

+2

$$+ 2(1+\delta\delta)\,gh\,d\Phi\,\cos\zeta\,\sin\Phi - 2\delta f g\,d\Phi$$

quae per $(1+\delta\delta)\,kk\cos\zeta - \delta f h\,(\sin\Phi + \delta\cos\Phi)$ multiplicata fit integrabilis, proditque

$$C = \gamma\gamma\left((1+\delta\delta)\,kk\cos\zeta - \delta f h\,(\sin\Phi+\delta\cos\Phi)\right)^2$$
$$+ 4gf d\Phi\left((1+\delta\delta)\,h\cos\zeta\sin\Phi - \delta f\right)\left((1+\delta\delta)\,kk\cos\zeta - \delta f h\,(\sin\Phi+\delta\cos\Phi)\right).$$

SCHOLION.

1022. Si hoc integrale evolvamus, reperiemus

$$C = \gamma\gamma\left((1+\delta\delta)\,kk\cos\zeta - \delta f h\,(\sin\Phi+\delta\cos\Phi)\right)^2 - 4(1+\delta\delta)^2 ghkk\cos\zeta^2\cos\Phi$$
$$- \delta(1+\delta\delta) fghh\cos\zeta\,(2\Phi - \sin 2\Phi - \delta\cos 2\Phi) - 4\delta(1+\delta\delta) fgkk\,\Phi\cos\zeta$$
$$- 4\delta\delta ffgh\,(\cos\Phi - \zeta\sin\Phi).$$

Quare si sumamus angulum HGI initio fuisse $= \theta$, indeque pendulum a quiete descensum inchoasse, constans C ita definitur, ut sit

$$C = -4(1+\delta\delta)^2\,ghkk\cos\zeta^2\cos\theta - \zeta(1+\delta\delta)\,fghh\cos\zeta\,(2\theta - \sin 2\theta - \delta\cos 2\theta)$$
$$- 4\delta(1+\delta\delta)\,fgkk\,\theta\cos\zeta - 4\delta\delta ffgh\,(\cos\theta + \delta\sin\theta)$$

quo valore substituto pendulum ex altera parte eousque ascendet, donec iterum fiat $\gamma = 0$. Verum hanc determinationem in genere suscipere haud licet, Neque vero ipsum problema in latissimo sensu resolvimus, ut ad omnia cujuscunque formae pendula pateret, sed primo assumsimus, binos terminos cylindricos utrinque a centro gravitatis aeque esse remotos: deinde etiam talem structuram statuimus, ut recta per centrum inertiae I axi gyrationis GG parallela ducta simul esset corporis axis principalis. Quae conditio nisi locum haberet, non licuisset momenta virium statim ad axem gyrationis GG transferre, sed etiam ratio habenda fuisset virium obliquarum, quae in terminis axis GG inaequales pressiones produxissent, ideoque formulae multo magis intricatae prodiissent. Ut igitur hinc quicquam ad usum concludamus, statuamus oscillationes esse minimas, et quomodo earum motus a frictione perturbetur, diligentius investigemus.

PROBLEMA 10.

1023. Si pendulum eo modo suspensum, uti in problemate praecedente assumsimus, oscillationes peragat quam minimas, earum motum a frictione perturbatum determinare. Fig. 135.

SOLUTIO.

Maneant omnia uti in problemate praecedente conſtituimus, ac ſi initio pendulum ad angulum HGI $= \theta$ fuerit declinatum, unde deſcenſum ex quiete inchoaverit, elapſo autem tempore t angulus HGI ſit $= \varphi$, et celeritas angularis in ſenſum IH $= \omega$, in praeſenti hypotheſi anguli θ et φ erunt minimi, qui ergo loco ſinuum et coſinuum ita introducantur, ut eorum poteſtates quadrato altiores rejiciantur. Hinc aequatio integralis §. praec. eruta induet hanc formam:

$$C = \omega\omega\,((1+\delta\delta)\,kk\,\mathrm{cof}\,\zeta - \delta f h\,(\varphi + \delta - \tfrac{1}{2}\,\delta\varphi\varphi))^2 - 4\,(1+\delta\delta)^2\,ghkk\,\mathrm{cof}\,\zeta^2\,(1-\tfrac{1}{2}\varphi\varphi) + \delta\delta\,(1+\delta\delta)\,fghb\,\mathrm{cof}\,\zeta\,(1-\varphi\varphi 2) - 4\delta\,(1+\delta\delta)\,fgkk\,\varphi\,\mathrm{cof}\,\zeta - 4\,\delta\delta\,ffgh\,(1-\delta\varphi-\tfrac{1}{2}\varphi\varphi)$$

ubi conſtans $C = -4\,(1+\delta\delta)^2\,ghkk\,\mathrm{cof}\,\zeta^2\,(1-\tfrac{1}{2}\theta\theta) + \delta\delta\,(1+\delta\delta)\,fghb\,\mathrm{cof}\,\zeta\,(1-2\theta\theta) - 4\delta\,(1+\delta\delta)\,fgkk\,\theta\,\mathrm{cof}\,\zeta - 4\delta\delta\,ffgh\,(1-\zeta\theta-\tfrac{1}{2}\theta\theta)$.

Hac igitur aequatione evoluta obtinebimus:

$$\omega\omega\,((1+\delta\delta)\,kk\,\mathrm{cof}\,\zeta - \delta\delta fh)^2 = 2gh\,((1+\delta\delta)^2\,kk\,\mathrm{cof}\,\zeta^2 - \delta\delta\,(1+\delta\delta)\,fh\,\mathrm{cof}\,\zeta + \delta\delta ff)\,(\theta\theta-\varphi\varphi) - 4\delta f g\,((1+\delta\delta)\,kk\,\mathrm{cof}\,\zeta - \delta\delta fh)\,(\theta-\varphi)$$

ubi in coefficiente ipſius $\omega\omega$ angulum φ neglexi, quia in evolutione perducturus eſſet ad altiores poteſtates. Ad hanc aequationem reſolvendam ſtatuamus brevitatis gratia:

$$(1+\delta\delta)\,kk\,\mathrm{cof}\,\zeta - \delta\delta fh = A$$
$$(1+\delta\delta)^2\,kk\,\mathrm{cof}\,\zeta^2 - \delta\delta\,(1+\delta\delta)\,fh\,\mathrm{cof}\,\zeta + \delta\delta ff = B$$

ut ſit

$$AA\,\omega\omega = 2Bgh\,(\theta\theta-\varphi\varphi) - 4A\delta fg\,(\theta-\varphi)$$

unde ponendo $\omega = 0$ invenimus, quousque pendulum ſit aſcenſurum, donec iterum ad quietem perducatur. Diviſione autem per $2g\,(\theta-\varphi)$ inſtituta oritur

$$Bh\,(\theta+\varphi) - 2A\delta f = 0$$

hincque $\varphi = -\theta + \dfrac{2A\delta f}{Bh}$, ſeu ad alteram partem ultra H tantum per angulum $\theta - \dfrac{2A\delta f}{Bh}$ aſcendet.

Porro ad durationem hujus oſcillationis inveſtigandam, cum ſit $\omega = \dfrac{r\,(2Bgh\,(\theta\theta-\varphi\varphi) - 4A\delta fg\,(\theta-\varphi))}{A} = \dfrac{-d\varphi}{dt}$, erit

dt

$$dt = \frac{-'Ad\varphi}{r(2Bgb(\theta\theta-\varphi\varphi)-4A\delta fg(\theta-\varphi))} \text{ seu}$$

$$dt = \frac{-Ad\varphi}{r2g(\theta-\varphi)(Bb(\theta+\varphi)-2A\delta f)}$$

unde integrando colligitur:

$$t = \frac{A}{r2Bgb}. \text{ Arc. } cos \frac{Bb-\varphi A\delta f}{Bb\theta-A\delta f}.$$

Statuatur nunc $\varphi = -\theta + \frac{2A\delta f}{Bb}$ seu $Bb\varphi - A\delta f = -Bb\theta + A\delta f$, erit

tempus oscillationis integrae $= \frac{\pi A}{r2Bgb}$; quod ergo non pendet ab amplitudine oscillationis, ita ut omnes oscillationes minimae maneant isochronae perinde ac si nulla frictio adesset. Sed non pari tempore absolventur. Quantum autem frictio tempus cujusque oscillationis turbet, quaeratur valor $\frac{A}{rB}$, ubi si crassitiem terminorum cylindricorum seu f ut minimam spectamus, est $\frac{J}{rB} = \frac{J}{(1+\delta\delta)k\,cos\zeta} + \frac{\delta\delta fb}{2(1+\delta\delta)^2k^3\,cos\zeta^2}$ ideoque $\frac{A}{rB} = k - \frac{\delta\delta fb}{2(1+\delta\delta)k\,cos\zeta}$: quare tempus unius oscillationis $= \frac{\pi}{r2gb}\left(k - \frac{\delta\delta fb}{2(1+\delta\delta)k\,cos\zeta}\right)$, unde patet, ob frictionem tempora oscillationum minui.

COROLL. 1.

1024. Si radius terminorum cylindricorum f sit valde exiguus prae quantitatibus b et k, erit proxime $B = A(1+\delta\delta)\,cos\zeta$. Hinc si primus arcus descensus sit $= \theta$, erit sequens arcus ascensus $= \theta - \frac{2\delta f}{(1+\delta\delta)b\,cos\zeta}$, qui simul est arcus descensus in secunda oscillatione.

CO-

COROLL. 2.

1025. Oſcillationes ergo ſucceſſivae ſequenti modo ſe habebunt:

In Oſcillatione	arcus deſcenſus	arcus aſcenſus	totus arcus
prima	θ	$\theta - \frac{2\delta f}{(1+\delta\delta)b\cos\zeta}$	$2\theta - \frac{2\delta f}{(1+\delta\delta)b\cos\zeta}$
ſecunda	$\theta - \frac{2\delta f}{(1+\delta\delta)b\cos\zeta}$	$\theta - \frac{4\delta f}{(1+\delta\delta)b\cos\zeta}$	$2\theta - \frac{6\delta f}{(1+\delta\delta)b\cos\zeta}$
tertia	$\theta - \frac{4\delta f}{(1+\delta\delta)b\cos\zeta}$	$\theta - \frac{6\delta f}{(1+\delta\delta)b\cos\zeta}$	$2\theta - \frac{10\delta f}{(1+\delta\delta)b\cos\zeta}$
quarta	$\theta - \frac{6\delta f}{(1+\delta\delta)b\cos\zeta}$	$\theta - \frac{8\delta f}{(1+\delta\delta)b\cos\zeta}$	$2\theta - \frac{14\delta f}{(1+\delta\delta)b\cos\zeta}$

COROLL. 3.

1026. Oſcillationes tamdiu durabunt, quamdiu arcus aſcenſuum manent poſitivi. Statim eniuque ac vel evaneſcunt, vel adeo negativi evadunt, motus omnis ceſſat. Atque ut motus oriatur, neceſſe eſt, ut ſit $\theta > \frac{A\delta f}{Bb}$, ſi enim fuerit $\theta =$ vel $< \frac{A\delta f}{Bb}$ pendulum ob frictionem pla-ne in quiete coercetur, etſi teneat ſitum inclinatum.

COROLL. 4.

1027. Ut ergo pendulum ſaltem unam oſcillationem peragat, debet eſſe $\theta > \frac{A\delta f}{Bb}$ exiſtente $\frac{A}{B} = \frac{1}{(1+\delta\delta)\cos\zeta}$: ut duas peragat oſcillationes, debet eſſe $\theta > \frac{3A\delta f}{Bb}$: ut tres, debet eſſe $\theta > \frac{5A\delta f}{Bb}$, atque in genere, ut peragat n oſcillationes, debet eſſe $\theta > \frac{(2n-1)A\delta f}{Bb}$. Verum hic numerum n majorem aſſumere non licet, quam ut angulus θ adhuc ſatis parvus maneat.

SCHOLION. 1.

1028. Quod ad diminutionem temporis oſcillationum ſingularum attinet, notaſſe juvabit, ſignificare $\frac{kk}{b}$ diſtantiam centri oſcillationis ab axe

axe gyrationis, quae ſi ponatur $= l$, erit tempus unius oſcillationis $= \frac{\pi r l}{r 2g}(1 - \frac{\delta\delta f}{2(1+\delta\delta, l\cos\zeta}))$. Hic autem primum obſervetur, capi debere $tang\,\zeta > \delta$, ut axis GG in loco ſuo maneat immotus. Quare ſi fuerit $l = 3$ pedum, quo caſu pendulum, niſi frictio obſtaret, fere ſingulis minutis ſecundis oſcillationes abſolveret; axiculorum autem radius ſit $f = \frac{1}{500}$ pedis, tum vero ſumatur $\delta = \frac{1}{3}$ et $\zeta = 20°$, fiet tempus unius oſcillationis $= \frac{\pi r l}{r 2g}(1 - \frac{1}{28191})$, ita ut ob frictionem demum poſt 28191 oſcillationes peractas ſeu poſt 8 fere horas error unius minuti ſecundi producatur. Hoc eodem caſu ut pendulum n oſcillationes peragere poſſit, antequam ad quietem redigatur, debet eſſe $\theta > \frac{2n-1}{4698}$. ſeu $\theta > 4$, 3905 $(2n - 1)$ min. ſec. Quare ſi 100 oſcillationes abſolvere debeat, primum ſumi debet $\theta > 874''$ ſeu $\theta > 14'$, $34''$. Quod ſi ergo θ capiatur $= 5°$, pendulum peraget oſcillationes 2050, antequam ad quietem redigetur. Si f ſit major vel minor quam $\frac{1}{500}$, effectus frictionis in eadem ratione major vel minor evadet.

SCHOLION. 2.

1029. Cum jam determinaverimus motum corporum circa axem fixum, ad alias motus ſpecies progrediamur, quibus corpus, dum movetur, ad ſuperficiem quandam atteritur. Hic igitur praecipue figura corporis, quatenus ſucceſſive aliae atque aliae partes ſuperficiei applicantur, ſpectari debet: ubi quidem primo ejusmodi corpora occurrunt, quae unico tantum puncto eodemque perpetuo ſuperficiem tangunt. Hic ſcilicet eſt caſus turbinum in cuſpidem deſinentium, qua continuo ſuperficiei inſiſtunt, quorum motum, quantum ob frictionem cuſpidis perturbetur, definiri conveniet. Deinde occurrunt corpora, quae unico quidem puncto perpetuo ſuperficiem tangunt, quod autem jugiter varietur, quemadmodum fit, ſi globi aliave corpora ſphaeroidica ſuper quadam ſuperficie moveantur, ac praeter motum progreſſivum motu gyratorio quocunque ferantur. His caſibus ad effectum frictionis cognoſcendum directio motus, quo punctum contactus ſuperficiem terit, quovis momento eſt ſpectanda, quippe cui directio vis frictionis eſt contraria. Sequuntur caſus, quibus corpus eadem quidem baſi ſuperficiem perpetuo tangit, uti fit in motu progreſſivo, ſed ubi corpus ſimul gyratur circa axem ad baſin normalem, ita ut ipſa baſis ſuper

ſuperficie in gyrum agatur. Porro progrediamur ad motus corporum cylindricorum ſuper planis ſuperficiebus, ubi contactus perpetuo fit ſecundum lineam rectam, ex cujus motu et appreſſione frictio eſt definienda. Quae autem corpora figuram ejusmodi habent anguloſam, ut dum moventur, aliae atque aliae hedrae ſuperficiei applicentur, quoniam conflictus talem motum comitatur, dum nova hedra ad contactum pertingit, eorum motus hic nondum evolvere licet, ſed prius ratio conflictus explicari debet. Secundum hanc ergo diviſionem motum turbinum in cuſpidem deſinentium ſuper plano horizontali determinare aggrediamur.

CAPUT IV.

DE MOTU TURBINUM IN CUSPIDEM DESINENTIUM SUPER PLANO HORIZONTALI FRICTIONIS HABITA RATIONE.

PROBLEMA 11.

Fig. 136. 1030. Si turbo ſuper plano horizontali moveatur utcunque, deturque ſingulis momentis ejus preſſio in planum, definire frictionem motumque turbinis progreſſivum.

SOLUTIO.

Repraeſentet tabula planum horizontale, ſuper quo turbo incedit, cujus axis tranſiens per centrum inertiae et cuſpidem nunc elapſo tempore t ſitum teneat AIF, ut I ſit centrum inertiae in ſublimi ſitum, F vero cuſpis, qua fit contactus in plano horizontali; voceturque intervallum $IF = f$, quod eſt conſtans. Ex I in planum demittatur perpendiculum IG, et ſumta in plano recta directrice OV ad fixam mundi plagam ſpectante, ad eam ex G et F ducantur normales GX et FZ, itemque per G recta KL ipſi OV parallela. Ponatur angulus $FIG = \varphi$, qui exprimit declinationem axis turbinis AF a ſitu verticali: et angulus $KGH = \Phi$, qui praebet declinationem plani verticalis, in quo jam axis turbinis verſatur, a plano verticali ſuper OV vel LK exſtructo

etc. Erit ergo GI $= f \cos \varrho$ et GF $= f \sin \varrho$: tum vero GN $= f \sin \varrho \cos \Phi$ et FN $= f \sin \varrho \sin \Phi$. Praeterea vero ſit OX $= x$, et XG $= y$; unde pro puncto F ſit OZ $= x - f \sin \varrho \cos \Phi$ et ZF $= y + f \sin \varrho \sin \Phi$: ex quibus motus cuſpidis F colligi poteſt, cujus celeritas ſecundum directionem OV vel NG eſt $= \frac{dx - f d. \sin \varrho \cos \Phi}{dt}$, et celeritas ſecundum directionem NF $= \frac{dy + f d. \sin \varrho \sin \Phi}{dt}$: quarum utraque niſi evaneſcat, cuſpis F ſuper plano movebitur frictionemque excitabit; ad cujus directionem inveniendam, ſit F*f directio* ſecundum quam cuſpis progreditur, quae retro in L producta dabit directionem frictionis FL, pro qua ponatur angulus FLG $= \omega$ eritque $tang\ \omega = \frac{dy + f d. \sin \varrho \sin \Phi}{dx - f d. \sin \varrho \cos \Phi}$. Sit jam preſſio, quam cuſpis in planum exerit $= \Pi$, pondere totius turbinis exiſtente $= M$, atque ob frictionem turbo in F ſollicitatur ſecundum directionem FL vi $= \delta \Pi$, quae reſoluta dat vim ſec. XO $= \delta \Pi \cos \omega$ et ſec. FZ $= \delta \Pi \sin \omega$. Ad motum ergo progreſſivum centri inertiae I definiendum, praeter has vires frictionis, ei applicata concipiatur vis deorſum urgens ſecundum IG, $= M - \Pi$, ac principia motus ſuppeditabunt has ternas aequationes:

$$\frac{ddx}{2g\,dt^2} = \frac{-\delta \Pi \cos \omega}{M}; \quad \frac{ddy}{2g\,dt^2} = \frac{-\delta \Pi \sin \omega}{M}$$

$$\text{et } \frac{f dd. \cos \varrho}{2g\,dt^2} = -1 + \frac{\Pi}{M},$$

unde ſtatim colligimus $ddx \sin \omega = ddy \cos \omega$. Ex his aequationibus, ſi anguli ϱ et ω ad tempus t ut cogniti ſpectentur, inde primo $\frac{\Pi}{M}$ tum vero differentialia dx et dy determinantur; ex iisque tandem angulus Φ ex formula $tang\ \omega = \frac{dy + f d. \sin \varrho \sin \Phi}{dx - f d. \sin \varrho \cos \Phi}$.

COROLL. 1.

1031. Si pro $\frac{\Pi}{M}$ valor inventus per ϱ ſubſtituatur, pro quantitatibus x et y determinandis habebimus has aequationes differentiales ſecundi gradus.

$$ddx = -2\delta g dt^2 \cos\omega - df\cos\omega\, dd.\cos\varphi$$
$$ddy = -2\delta g dt^2 \sin\omega - df\sin\omega\, dd.\cos\varphi.$$

COROLL. 2.

1032. Pro directione frictionis FL, ratione rectae FH, cum sit angulus LGF $= \varphi$ et angulus FLG $= \omega$, erit angulus GFL $= 180° - \varphi - \omega$; ipsa autem frictio est $= \delta\Pi$: nisi sit celeritas cuspidis F nulla, quo casu frictio subito evanescit; id quod evenit, si fuerit $dx = fd.\sin\varphi\cos\Phi$ et $dy = -fd.\sin\varphi\sin\Phi$.

SCHOLION.

1033. Ex his aequationibus nihil adhuc concludere licet, cum relatio variabilium ω et Π seu φ ad tempus t nondum constet, quae demum ex motu gyratorio erui debet. Iis autem inventis, per formulas hic traditas variabiles x et y, sicque motus progressivus centri inertiae I definiri poterit. Quamobrem angulum ω in determinationem motus gyratorii introducamus, etiamsi ejus relatio ad angulos φ, Φ et tempus assignari possit. Cum enim sit

$$dy\cos\omega + f\cos\omega\, d.\sin\varphi\sin\Phi - dx\sin\omega + f\sin\omega\, d.\sin\varphi\cos\Phi = 0$$

quo x et y facilius elidere queamus, ponamus

$$f\cos\omega\, d.\sin\varphi\sin\Phi + f\sin\omega\, d.\sin\varphi\cos\Phi = sdt$$

ut sit $dy\cos\omega - dx\sin\omega + sdt = 0$:

quae aequatio differentiata ob $ddy\cos\omega = ddx\sin\omega$ dat

$$-dy\sin\omega - dx\cos\omega + \frac{dsdt}{d\omega} = 0.$$

Differentietur porro, et ob $ddy\sin\omega + ddx\cos\omega = \frac{-2\delta g\Pi dt^2}{M}$ prodit

$$\frac{2\delta g\Pi dt^2}{M} - dy\, d\omega\cos\omega + dx\, d\omega\sin\omega + dt\, d.\frac{ds}{d\omega} = 0:$$

addatur prima per $d\omega$ multiplicata, fietque per dt dividendo

$$\frac{2\delta g\Pi dt}{M} + sd\omega + d.\frac{ds}{d\omega} = 0,$$

qua aequatione relatio inter s, ω, Π et t exprimitur, quae forte in sequentibus usum habebit. Involvit autem s angulos φ, Φ et ω, estque $\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{fdd\cos\varphi}{2gdt^2}$, ita ut hic adhuc insint quatuor variabiles φ, Φ, ω et t.

PRO-

PROBLEMA. 12.

1034. Dum turbo utcunque ſuper plano horizontali movetur, et frictionem patitur, determinare virium, quibus ſollicitatur, momenta reſpectu axium principalium turbinis.

SOLUTIO.

In ſphaera centro inertiae turbinis I deſcripta repraeſentet circulus GZH planum verticale, in quo jam axis turbinis per centrum inertiae I et cuſpidem F ductus AIF verſetur, qui ſimul ſit axis principalis turbinis, ejusque reſpectu momentum inertiae $= Maa$, bini reliqui vero axes principales ex I ad ſphaerae puncta B et C pertingant, quorum reſpectu ſint momenta inertiae aequalia $= Mcc$, ita ut in formulis noſtris generalibus ſit $bb = cc$ quemadmodum jam ſupra aſſumſimus. Poſito Z puncto ſphaerae verticali, erit arcus $ZA = \varrho$, ponamus autem ductis arcubus ZB et ZC, ut ſupra $ZA = l$, $ZB = m$, et $ZC = n$, ut ſit $\varrho = l$. His poſitis vires, quibus turbo ſollicitatur, ſunt primo ejus pondus $= M$, quae vis centro inertiae I applicata nulla praebet momenta; deinde adeſt preſſio, qua planum horizontale in cuſpidem F reagit, cujus directio eſt verticalis ſurſum directa $F\Pi$, quae vis ſit $= \Pi$, Fig. 137.

vidimusque eſſe $\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{fdd.\cos\varrho}{2gdt^2}$. Denique ſollicitatur turbo in F a frictione $= \delta\Pi$, niſi cuſpis quieſcat, cujus directio FL eſt horizontalis: ac pro ejus ſitu ducatur circulus maximus horizontalis GΛH, in quo capiatur ſecundum §. 1032. arcus $H\Lambda = 180° - \varphi - \omega$ ſeu $G\Lambda = \varphi + \omega$, ubi φ denotat declinationem plani GZH a plano quodam verticali fixo; angulus ω autem ex formulis in praecedente problemate traditis definiri debet: eritque directio FL radio IΛ parallela. Iam ad virium harum momenta reſpectu axium principalium inveſtiganda; primum ipſae vires ſecundum directiones horum axium reſolvantur, quem in finem ut in centro inertiae applicatae conſiderentur. Vis ergo $F\Pi = \Pi$, in directione IZ applicata praebet vim ſec. $IA = \Pi \cos ZA = \Pi \cos l$; vim ſec. $IB = \Pi \cos ZB = \Pi \cos m$ et vim ſec. $IC = \Pi \cos ZC = \Pi \cos n$. Deinde vis $FL = \delta\Pi$ in IΛ applicata reſolvitur in vires 1° ſec. $IA = \delta\Pi \cos A\Lambda$, 2° ſec. $IB = \delta\Pi \cos B\Lambda$, 3° ſec. $IC = \delta\Pi \cos C\Lambda$. Ad has autem evolvendas ſit ZX ille circulus verticalis fixus, ideoque angulus $XZA = \varphi$, ponamus autem ut ſupra angulos $XZA = \lambda$, $XZB = \mu$ et $XZC = \nu$, ut ſit $\varphi = \lambda$, et ob $AZ\Lambda = 180° - \lambda - \omega$, erit $XZ\Lambda = 180° - \omega$, hincque $BZ\Lambda = \mu + \omega - 180°$, et $CZ\Lambda = 180° - \nu - \omega$, unde ob ZΛ quadrantem prodit $\cos A\Lambda = -\sin l \cos(\lambda + \omega)$,

$cof\,BA = -\delta i\, m\, cof\,(\mu + \omega)$ et $cof\,CA = -\delta i\, n\, cof\,(\nu + \omega)$. Quocirca habebimus

$$\text{vim sec. } IA = \Pi\, cof\, l - \delta\Pi\, \delta i\, l\, cof\,(\lambda + \omega)$$
$$\text{vim sec. } IB = \Pi\, cof\, m - \delta\Pi\, \delta i\, m\, cof\,(\mu + \omega)$$
$$\text{vim sec. } IC = \Pi\, cof\, n - \delta\Pi\, \delta i\, n\, cof\,(\nu + \omega)$$

has autem vires nunc in puncto F applicatas concipi oportet, existente $IF = f$: unde momenta earum respectu axium principalium, quae supra litteris P, Q, R designavimus, concluduntur

$$P = 0,$$
$$Q = \Pi f\, cof\, n - \delta f\, \Pi\, \delta i\, n\, cof\,(\nu + \omega)$$
$$R = -\Pi f\, cof\, m + \delta\Pi f\, \delta i\, m\, cof\,(\mu + \omega).$$

PROBLEMA. 13.

1035. His virium momentis inventis exhibere aequationes, quibus motus turbinis super plano horizontali incedentis et a frictione perturbatus, contineatur.

SOLUTIO.

Fig. 137. Primo pro motu gyratorio teneat elapso tempore t turbo situm in figura repraesentatum, ubi omnes denominationes modo factae maneant. Ac nunc gyretur turbo circa axem IO in sensum ABC celeritate angulari $= \delta$, pro puncto O autem sint arcus $AO = \alpha$, $BO = \mathfrak{C}$, $CO = \gamma$, ponaturque

$$\delta\, cof\,\alpha = x,\ \delta\, cof\,\mathfrak{C} = y,\ \delta\, cof\,\gamma = z,$$

quae quantitates per momenta modo inventa ita determinantur, ut primo sit $dx = 0$, ideoque $x = \text{const.}$ Ponatur ergo $x = h$, et pro y et z has habebimus aequationes

$$dy + \frac{(aa - cc)}{cc}\, hz\,dt = \frac{2\Pi f g\,dt}{Mcc}\,(cof\, n - \delta\, \delta i\, n\, cof\,(\nu + \omega))$$

$$dz - \frac{(aa - cc)}{cc}\, hy\,dt = \frac{-2\Pi f g\,dt}{Mcc}\,(cof\, m - \delta\, \delta i\, m\, cof\,(\mu + \omega)).$$

Tum vero pro arcubus l, m, n itemque angulis λ, μ, ν ostendimus esse:

$$dl\, \delta i\, l = dt\,(y\, cof\, n - z\, cof\, m);\ d\lambda\, \delta i\, l^2 = -dt\,(y\, cof\, m + z\, cof\, n)$$

dm

$dm \, si \, m = dt \, (z \, cos \, l - h \, cos \, n)$; $d\mu \, si \, m^2 = - dt \, (z \, cos \, n + h \, cos \, l)$
$dn \, si \, n = dt \, (h \, cos \, m - y \, cos \, l)$; $d\nu \, si \, n^2 = - dt \, (h \, cos \, l + y \, cos \, m)$
ubi praeterea hae relationes sunt notandae:

$$cos \, (\mu - \lambda) = \frac{- cos \, l \, cos \, m}{si \, l \, si \, m}; \; cos \, (\nu - \lambda) = \frac{- cos \, l \, cos \, n}{si \, l \, si \, n}$$

$$si \, (\mu - \lambda) = \frac{- cos \, n}{si \, i \, si \, m}; \; si \, (\nu - \lambda) = \frac{+ cos \, m}{si \, l \, si \, n}$$

unde anguli μ et ν per λ ita definiuntur:

$$cos \, \mu = \frac{- cos \, \lambda \, cos \, l \, cos \, m + si \, \lambda \, cos \, n}{si \, l \, si \, m}; \; cos \, \nu = \frac{- cos \, \lambda \, cos \, l \, cos \, n - si \, \lambda \, cos \, m}{si \, l \, si \, n}$$

$$si \, \mu = \frac{- si \, \lambda \, cos \, l \, cos \, m - cos \, \lambda \, cos \, n}{si \, l \, si \, m}; \; si \, \nu = \frac{- si \, \lambda \, cos \, l \, cos \, n + cos \, \lambda \, cos \, m}{si \, l \, si \, n}.$$

Hicque est $\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{f \, dd. \, cos \, l}{2 g \, dt^2}$. At angulus ω ex motu progressivo est ingressus, pro quo si in fig. 136. ad situm centri inertiae I definiendum, distinctionis causa vocemus coordinatas OX = X et XG = Y, existente GI = $f \, cos \, l$, ad superiores aequationes insuper has adjungere debemus:

$$\frac{ddX}{2 g \, dt^2} = \frac{- \delta \Pi}{M} \, cos \, \omega; \; \frac{ddY}{2 g \, dt^2} = \frac{- \delta \Pi}{M} \, si \, \omega$$

et $dY \, cos \, \omega - dX \, si \, \omega + f \, cos \, \omega \, d. \, si \, l \, si \, \lambda + f \, si \, \omega \, d. \, si \, l \, cos \, \lambda = 0$.
Atque in his aequationibus omnia, quae tam ad motum progressivum quam gyratorium spectant, determinantur. Si primo quantitates X et Y e calculo excludere velimus, loco harum trium postremarum aequationum sequentem unicam adhibuisse sufficit: pro qua si ponatur

$$s dt = f \, cos \, \omega \, d. \, si \, l \, si \, \lambda + f \, si \, \omega \, d. \, si \, l \, cos \, \lambda$$

seu sumtis his differentialibus locoque dl et $d\lambda$ valoribus superioribus substitutis erit

$$s = - f y \, si \, n \, si \, (\omega + \nu) + f z \, si \, m \, si \, (\omega + \mu)$$

et aequatio loco illarum trium usurpanda supra inventa est

$$\frac{2 \delta g \Pi \, dt}{M} + s d\omega + d. \frac{ds}{d\omega} = 0.$$

SCHOLION. I.

1036. Multitudo harum aequationum, praecipue autem angulus ω primas aequationes ingrediens in causa est, quod earum resolutionem nullo modo suscipere liceat. Unde patet motum turbinum ob frictionem maxime fore perturbatum, ita ut ex his aequationibus nihil omnino,

omnino, unde hic motus cognoſci poſſet, concludere valeamus. Quodſi vero hujus motus cauſas obiter tantum contemplemur, evidens eſt centrum inertiae I non in recta tantum verticali, ut remota frictione eveniebat, aſcendere vel deſcendere; ſed etiam motum horizontalem adipiſci, qui oritur a vi frictionis, cujus directio cum ſit contraria motui cuſpidis, motus centri inertiae ſecundum eandem directionem incitatur, unde neque uniformis neque rectilineus erit, et quatenus incurvatur, ejus convexitas in eam regionem ſpectabit, in quam cuſpis progreditur. Simili modo etiam motus gyratorius tam ratione celeritatis quam ratione axis gyrationis maxime perturbabitur, de quo vix quicquam ex conſideratione frictionis affirmare licet.

SCHOLION. 2.

1037. Verum haec tanta motus perturbatio tamdiu duntaxat durat, donec frictio ceſſat, hoc autem tandem evenire debere per ſe eſt evidens, quandoquidem motus ob frictionem continuo retardatur. At frictio ceſſare nequit, niſi cuſpis turbinis in eodem loco perſiſtat, ex quo neceſſe eſt motum ita temperari debere, ut cuſpis tandem in eodem plani puncto ſit perſeveraturus, dummodo hoc eveniat, antequam turbo procumbat. Si enim turbini primo motus gyratorius nimis tardus fuerit impreſſus, nullum eſt dubium, quin procumbat, antequam illud phaenomenon oriatur: ex quo viciſſim concludere licet, ſi motus ſatis fuerit celer, fore, ut antequam turbo procumbat, cuſpis a frictione ad idem plani horizontalis punctum redigatur. Quod cum evenerit, atque in turbine adhuc motus inſit gyratorius, ex ſuperioribus patet, axem turbinis verticalem eſſe debere; ſi enim eſſet inclinatus, nullo modo ita gyrari poſſet, ut cuſpis eidem puncto inſiſteret. Ex his igitur conjunctis hanc concluſionem deducimus: turbinem, ſi modo ei ſatis celer motus gyratorius fuerit impreſſus, ob frictionem ſe tandem in ſitum verticalem erigere, et tum circa axem verticalem motum gyratorium eſſe continuaturum. Quod phaenomenon eo magis eſt notatu dignum, quod ſoli frictioni debeatur; ita ut ope frictionis linea verticalis, ideoque etiam planum horizontale obtineri queat; id quod in navigatione magnum uſum habere poteſt, ad quem etiam in Anglia olim fuit commendatum.

CAPUT V.

DE MOTU GLOBORUM, CENTRUM INERTIAE IN IPSORUM CENTRO SITUM HABENTIUM, SUPER PLANO HORIZONTALI.

PROBLEMA. 14.

1038. Si globus ſuper plano horizontali utcunque tam motu progreſſivo quam gyratorio moveatur, determinare celeritatem et directionem, qua punctum contactus radit ſuperficiem horizontalem.

SOLUTIO.

Sit I centrum ſimulque centrum inertiae globi, ejusque radius $= f$, et contactus fiet in puncto imo T. Motus autem globi ita ſit comparatus, **ut centrum inertiae moveatur ſecundum** directionem PIR celeritate $= v$, ſimul vero gyretur circa axem quemcunque IO celeritate angulari $= \gamma$, in eum ſenſum, ut punctum T circa O incedat per arculum Tt, ac pro poſitione puncti O ſtatuamus angulum PTO $= \theta$ et arcum TO $= s$, ubi quidem arcus ita ſumo, quaſi radius globi eſſet $= 1$. Ducatur TV ipſi PIR parallela, ac ſi motus gyratorius abeſſet, punctum contactus T raſurum eſſet planum horizontale celeri- $= v$ in directione TV. Deinde ſi globus ſolo motu gyratorio ferretur, quia punctum T per Tt moveretur celeritate $= f\gamma \mathit{ſin}$ TO $= f\gamma \mathit{ſin}\, s$, cujus directio cum ſit horizontalis, in plano per rectam TΘ referatur, ita ut ſit angulus STΘ $=$ PT$t = \theta - 90°$ ob OTt rectum. Erit ergo VTΘ $= 270° - \theta$. Capiantur rectae TV $= v$ et TΘ $= f\gamma \mathit{ſi}\, s$, et quia punctum T his duobus motibus conjunctim movetur, ejus verus motus fiet ſecundum rectam TF diagonalem parallelogrammi TVFΘ. Ex F ad TV ducta normali FH, erit VH $= f\gamma \mathit{ſin}\, s \mathit{ſin}\, \theta$ et FH $= -f\gamma \mathit{ſin}\, s \mathit{coſ}\, \theta$, unde fit TH $= v - f\gamma \mathit{ſi}\, s \mathit{ſi}\, \theta$ atque celeritas radens TF $= r\,(vv - 2f\gamma v \mathit{ſi}\, s \mathit{ſi}\, \theta + ff\gamma\gamma \mathit{ſi}\, s^2)$

Fig. 138.

$$\text{et } \mathit{tang}\ \text{VTF} = \frac{-f\gamma \mathit{ſi}\, s \mathit{coſ}\, \theta}{v - f\gamma \mathit{ſi}\, s \mathit{ſi}\, \theta}.$$

Ducatur ex centro I ipſi TF parallela IQ, erit arcus TQ quadrans, et angu-

angulus RTQ = VTF. Quare ſi IQ ſit directioni, ſecundum quam punctum T radit, parallela, erit

$$tang\ \text{PTQ} = \frac{f\gamma\sin s\cos\theta}{v - f\gamma\sin s\sin\theta},$$

ac poſita celeritate radente $= (vv - 2f\gamma v\sin s\sin\theta + ff\gamma\gamma\sin s^2) = u$ erit

$$\sin\text{PTQ} = \frac{-f\gamma\sin s\cos\theta}{u} \text{ et } \cos\text{PTQ} = \frac{f\gamma\sin s\sin\theta - v}{u}.$$

COROLL. 1.

1039. Fieri ergo poteſt, ut celeritas radens ideoque et attritus evaneſcat, quo caſu hae duae conditiones locum habere debent, altera $\gamma\sin s\cos\theta = 0$, altera $v = f\gamma\sin s\sin\theta$. Unde ſtatim patet, ſi nullus adſit motus progreſſivus, ſeu $v = 0$, nullum attritum affore, ſi $\sin s = 0$, hoc eſt ſi globus circa axem verticalem ZT gyretur.

COROLL. 2.

1040. Deinde motus globi ab attritu erit liber, ſi fuerit primo $\cos\theta = 0$, ſeu angulus PTO rectus: deinde celeritas progreſſiva v ad angularem γ hanc relationem tenere debet, ut ſit $v = f\gamma\sin s$, ſeu TV $=$ TΘ, et angulus ST$\Theta = 0$.

COROLL. 3.

1041. Quando ergo globus hujusmodi motum eſt conſecutus, quia ſublato omni attritu etiam nulla adeſt frictio, globus eundem motum conſtanter conſervabit, ſiquidem axis gyrationis IO habeat proprietatem axis principalis.

SCHOLION. 1.

1042. Quemadmodum hic frictionem conſtituimus, ea non obſtat, quominus globus ſuper plano horizontali motum ſuum intemeratum conſervare poſſit, quod tamen minime fieri obſervamus, cum globus ſuper tabula tali motu latus mox omnem motum amittat, cujus rei cauſa reſiſtentiae aeris tribui nequit. Verum hic primum animadverto, experimenta nunquam Theoriae perfectiſſime congruere: veluti dum caſu hic tractato aſſumſimus, contactum unico fieri puncto, id ſemper in praxi ſecus evenit. Interim tamen ſi arcus TO eſt quadrans et PTO $= 90°$, exiſtente $v = f\gamma$, tametſi contactus non fiat in uno

uno puncto, tamen attritus evaneſcit, ideoque hic motus extinctio neutiquam frictioni adſcribi poteſt. Ex quo concludere debemus, praeter frictionem, uti hic eam definivimus, aliud adhuc dari motus impedimentum, dum corpora ſuper ſuperficiebus incedunt, a frictione probe diſtinguendum, cujus ratio utcunque fuerit comparata, ejus effectus potius ſeorſim inveſtigari convenit, quam frictionis indolem hic ſtabilitam immutari. Et quemadmodum hic a reſiſtentia aeris mentem abſtrahimus, ita etiam licebit hoc obſtaculum frictionem concomitans a praeſenti argumento ſejungere.

SCHOLION. 2.

1043. Corpora hic ſphaerica conſidero, in quorum centro ſitum ſit ipſorum centrum inertiae I, quod ergo ipſum etiam in plano horizontali moveatur, et puncto contactus T perpetuo verticaliter immineat. Ex quo patet, preſſionem in contactu ſemper fore ponderi corporis M aequalem. Si ergo corpus ex materia uniformi conſtaret, omnes ejus diametri proprietate axium principalium gauderent, ſed concipiamus materiae diſtributionem utcunque inaequabilem, ita tamen ut centrum inertiae cadat in centrum figurae: Quare neceſſe erit in globo ternos axes principales conſiderari, qui ex centro I pertingant in puncta A, B, C, quadrantibus a ſe invicem diſtantia, quorum reſpectu ſit, ut ſupra poſuimus, momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc. Quanquam autem deinceps bina vel omnia haec momenta inter ſe aequalia ſtatuemus, tamen conveniet hujusmodi tria puncta in ſuperficie fixa notaſſe, quo ex eorum relatione ad ſpatium abſolutum, facilius motus globi definiri poſſit. Conſtitutis autem in globo his tribus punctis A, B, C, quoniam motus gyrationis circa O, quem in plagam Tt dirigi aſſumſimus, ſenſum habet CBA contrarium ei, quem ſupra ſtatuimus, in applicatione formularum generalium ad hunc caſum celeritatem angularem ω ut negativam ſpectare debemus.

PROBLEMA. 15.

1044. Si globus ſuper plano horizontali utcunque moveatur, definire vires, quibus ſollicitatur, earumque momenta reſpectu ternorum axium principalium globi.

SOLUTIO.

Incluſus concipiatur globus ſphaerae vel fixae vel cum eo parem motum progreſſivum habenti, in qua Z ſit punctum verticale ejusque Fig. 139.

oppoſitum T punctum contactus, DE vero ſit diameter horizontalis ad certam mundi plagam tendens, et DPQE circulus maximus horizontalis. Nunc autem elapſo tempore t, moveatur globus motu progreſſivo ſecundum directionem PI celeritate $= v$, ponaturque arcus DP ſeu angulus $DZP = \varphi$; axes autem principales nunc ſint in A, B, C. Tum vero globus jam gyretur circa axem IO, celeritate angulari $= \gamma$ in ſenſum ACB: ſitque pro ſitu puncti O angulus PTO ſeu $PZO = \theta$, et arcus $ZO = s$. Etſi enim ante arcum TO poſuimus $= s$, quia tantum ejus ſinus in computum intrat, perinde eſt. Erit ergo angulus $DZO = \theta + \varphi$, et $EZO = 180° - \theta - \varphi$. Deinde ſi a punctis A, B, C tam ad O quam ad Z arcus circulorum magnorum ducti concipiantur, ſint ut hactenus arcus $AO = \alpha$, $BO = \beta$, $CO = \gamma$; $ZA = l$, $ZB = m$, $ZC = n$, et anguli $EZA = \lambda$, $EZB = \mu$, $EZC = \nu$. In praecedente autem problemate oſtendimus, punctum contactus T planum ſubjectum radere ſecundum directionem radio IQ parallelam celeritate $= \sqrt{(vv - 2f\gamma v \sin s \sin\theta + ff \sin s^2)}$, foreque

$$tang\ PTQ = tang\ PZQ = \frac{f\gamma \sin s \cos\theta}{v - f\gamma \sin s \sin\theta}.$$

denotante f radium globi. Cum igitur preſſio in T ſit $= M$, frictio erit $= \delta M$, quae puncto T eſt applicata ſecundum directionem ipſi QI parallelam. Hac ergo vi reſoluta ſecundum directiones axium principalium IA, IB, IC, prodit vis ſec. $IA = -\delta M \cos AQ$; vis ſec. $IB = -\delta M \cos BQ$, et vis ſec. $IC = -\delta M \cos CQ$, quae ternae vires in puncto T applicatae ſunt concipiendae, unde colliguntur momenta

Reſp. axis IA in ſenſum $BC = -\delta M f \cos CQ \cos BT + \delta M f \cos BQ \cos CT = P$

Reſp. axis IB in ſenſum $CA = -\delta M f \cos AQ \cos CT + \delta M f \cos CQ \cos AT = Q$

Reſp. axis IC in ſenſum $AB = -\delta M f \cos BQ \cos AT + \delta M f \cos AQ \cos BT = R$.

Erunt ergo haec tria momenta:

$$P = \delta M f (\cos m \cos CQ - \cos n \cos BQ)$$
$$Q = \delta M f (\cos n \cos AQ - \cos l \cos CQ)$$
$$R = \delta M f (\cos l \cos BQ - \cos m \cos AQ).$$

Pro puncto autem Q ponamus angulum $PZQ = \xi$ ut ſit $tang\ \xi = \frac{f\gamma \sin s \cos\theta}{v - f\gamma \sin s \sin\theta}$ et poſita celeritate radente $\sqrt{(vv - 2f\gamma v \sin s \sin\theta + ff\gamma\gamma \sin s^2)} = u$,

$= u$, erit $\int \xi = \frac{-f \alpha \int s \cos \theta}{u}$ et $\cos \xi = \frac{f \alpha \int s \int \theta - v}{u}$.

Fit ergo $DZQ = \varphi + \xi$ et $EZQ = 180° - \xi - \varphi$; hincque

$AZQ = 180° - \xi - \varphi + \lambda$; $BZQ = \mu + \xi + \varphi - 180°$;

$CZQ = 180° - \xi - \varphi - \nu$

ergo $\cos AQ = -\cos(\xi + \varphi + \lambda) \int l$

$\cos BQ = -\cos(\xi + \varphi + \mu) \int m$

$\cos CQ = -\cos(\xi + \varphi + \nu) \int n$.

Ex relatione igitur, quae inter angulos λ, μ et ν intercedit, concludemus momenta virium:

$P = \delta M f \int l \int (\lambda + \varphi + \xi)$

$Q = \delta M f \int m \int (\mu + \varphi + \xi)$

$R = \delta M f \int n \int (\nu + \varphi + \xi)$.

PROBLEMA. 16.

1045. Si motum gyratorium ad quodvis tempus ut datum ſpectemus, definire motum progreſſivum globi.

SOLUTIO.

Quia centrum globi in plano horizontali movetur, deſcripſerit id tempore t lineam GI, quae referatur ad diretricem GX ſuperiori directioni fixae DE parallelam, ductaque IX ad GX normali, ſint coordinatae $GX = X$, $XI = Y$. Per I ducatur recta DE ipſi GX parallela, quae erit ipſa diameter DE in fig. 139. Ducatur IP, ut ſit $DIP = EIR = \varphi$ et centrum I per hypotheſin progreditur in directione IR celeritate $= v$, ita ut ſit celeritas ſecundum $GX = v \cos \varphi$ et celeritas ſecundum $XI = v \int \varphi$, ideoque $dX = vdt \cos \varphi$ et $dY = vdt \int \varphi$. Ducatur recta QIS, ut IQ ſit directioni, qua punctum contactus radit parallela, erit angulus $EIQ = DIS = 180° - \xi - \varphi$, eſt enim aequalis angulo EZQ in praec. figura, unde globus ſollicitari cenſendus eſt vi $= \delta M$ in directione IS. Hinc ergo oritur vis ſecundum $ID = -\delta M \cos(\xi + \varphi)$ et vis ſecundum $XI = \delta M \int (\xi + \varphi)$. Ex quibus colligitur

Fig. 140.

$$\frac{d.v\cos\varphi}{2gdt} = \frac{dv\cos\varphi - vd\varphi\int\varphi}{2gdt} = \delta\cos(\xi+\varphi)$$

$$\frac{d.v\int\varphi}{2gdt} = \frac{dv\int\varphi + vd\varphi\cos\varphi}{2gdt} = \delta\int(\xi+\varphi)$$

hincque porro

$$\frac{dv}{2g\,dt} = \delta\, cos\,\xi \text{ et } \frac{v\,d\Phi}{2g\,dt} = \delta\, sin\,\xi$$

ita ut sit $\frac{v\,d\Phi}{dv} = tang\,\xi = \frac{f\gamma sin\,s\,cos\,\theta}{v - f\gamma sin\,s\,sin\,\theta}$.

PROBLEMA. 17.

1046. Definito motu progressivo globi, determinare ejus motum gyratorium.

SOLUTIO.

Fig. 139. Spectetur nunc centrum globi I ut quiescens, et maneant omnes denominationes in probl. 15. adhibitae, sintque Maa, Mbb, Mcc momenta inertiae respectu axium principalium IA, IB, IC, quae primo ut inaequalia consideremus. Quoniam vero hic celeritatem angularem γ ut negativam spectare debemus, quia tendit in sensum ACB, si ponamus $\gamma\, cos\,\alpha = x$, $\gamma\, cos\,\beta = y$, et $\gamma\, cos\,\gamma = z$, in formulis generalibus has literas x, y, z negative sumi oportet, ex §. 810. habebimus has aequationes motum determinantes,

$$dx + \frac{bb-cc}{aa}\,yz\,dt + \frac{2\delta f g}{aa}\,dt\,sin\,l\,sin\,(\lambda+\varphi+\xi) = 0$$

$$dy + \frac{cc-aa}{bb}\,xz\,dt + \frac{2\delta f g}{bb}\,dt\,sin\,m\,sin\,(\mu+\varphi+\xi) = 0.$$

$$dz + \frac{aa-bb}{cc}\,xy\,dt + \frac{2\delta f g}{cc}\,dt\,sin\,n\,sin\,(\nu+\varphi+\xi) = 0$$

$$dl\,sin\,l = dt\,(z\,cos\,m - y\,cos\,n);\quad d\lambda\,sin\,l^2 = dt\,(y\,cos\,m + z\,cos\,n)$$
$$dm\,sin\,m = dt\,(x\,cos\,n - z\,cos\,l);\quad d\mu\,sin\,m^2 = dt\,(z\,cos\,n + x\,cos\,l)$$
$$dn\,sin\,n = dt\,(y\,cos\,l - x\,cos\,m);\quad d\nu\,sin\,n^2 = dt\,(x\,cos\,l + y\,cos\,m).$$

Tum vero ex motu progressivo habemus:

$$dv = 2\delta g\,dt\,cos\,\xi;\quad v\,d\varphi = 2\delta g\,dt\,sin\,\xi$$

et $tang\,\xi = \frac{f\gamma sin\,s\,cos\,\theta}{v - f\gamma sin\,s\,sin\,\theta}$.

Ubi est PZO $= \theta$ et ZO $= s$. Cum ergo sit EZO $= 180° - \theta - \varphi$: erit AZO $= 180° - \lambda - \theta - \varphi$: hincque

cos

$$\cos\alpha = \cos l \cos s - \sin l \sin s \cos(\lambda + \theta + \varphi)$$
$$\cos\mathfrak{C} = \cos m \cos s - \sin m \sin s \cos(\mu + \theta + \varphi)$$
$$\cos\gamma = \cos n \cos s - \sin n \sin s \cos(\nu + \theta + \varphi)$$

existente $\cos s = \cos l \cos\alpha + \cos m \cos\mathfrak{C} + \cos n \cos\gamma$

unde sequitur fore

$$\sin l \cos l \cos(\lambda + \theta + \varphi) + \sin m \cos m \cos(\mu + \theta + \varphi) + \sin n \cos n \cos(\nu + \theta + \varphi) = 0.$$

Ponamus $v \cos s = p$ et $v \sin s = q$, ut fit $\tang \xi = \frac{f q \cos\theta}{v - f q \sin\theta} = \frac{v\,d\varphi}{dv}$; eritque

$$x = p \cos l - q \sin l \cos(\lambda + \theta + \varphi)$$
$$y = p \cos m - q \sin m \cos(\mu + \theta + \varphi)$$
$$z = p \cos n - q \sin n \cos(\nu + \theta + \varphi)$$

ex quibus valoribus fit

$$dl = q\,dt \sin(\lambda + \theta + \varphi); \quad d\lambda = p\,dt + q\,dt \cot l \cos(\lambda + \theta + \varphi)$$
$$dm = q\,dt \sin(\mu + \theta + \varphi); \quad d\mu = p\,dt + q\,dt \cot m \cos(\mu + \theta + \varphi)$$
$$dn = q\,dt \sin(\nu + \theta + \varphi); \quad d\nu = p\,dt + q\,dt \cot n \cos(\nu + \theta + \varphi)$$

indeque porro

$$dx = dp \cos l - dq \sin l \cos(\lambda + \theta + \varphi) + q\,(d\theta + d\varphi) \sin l \sin(\lambda + \theta + \varphi)$$
$$dy = dp \cos m - dq \sin m \cos(\mu + \theta + \varphi) + q\,(d\theta + d\varphi) \sin m \sin(\mu + \theta + \varphi)$$
$$dz = dp \cos n - dq \sin n \cos(\nu + \theta + \varphi) + q\,(d\theta + d\varphi) \sin n \sin(\nu + \theta + \varphi).$$

At sine subsidio harum substitutionum ex aequationibus ternis primis, cum in genere sit $\sin l \cos l \sin(\lambda + A) + \sin m \cos m \sin(\mu + A) + \sin n \cos n \sin(\nu + A) = 0$, elicimus hanc aequationem

$$aa\,dx \cos l + bb\,dy \cos m + cc\,dz \cos n - aax\,dl \sin l - bby\,dm \sin m - ccz\,dn \sin n = 0$$

cujus integrale est

$$aax \cos l + bby \cos m + ccz \cos n = C$$

quae adhibitis substitutionibus abit in hanc formam:

$$p\,(aa \cos l^2 + bb \cos m^2 + cc \cos n^2) - q\,(aa \sin l \cos l \cos(\lambda + \theta + \varphi) + bb \sin m \cos m \cos(\mu + \theta + \varphi) + cc \sin n \cos n \cos(\nu + \theta + \varphi))$$

$=$ Const.

Deinde

Deinde etiam per reductiones §. 934. traditas pro vi viva colligitur haec aequatio differentialis

$$aaxdx + bbydy + cczdz = 2\delta fgqdt\, si\,(\xi - \theta).$$

SCHOLION.

1047. Ad reductiones hic factas intelligendas ex formulis supra traditis, ubi angulos μ et ν per λ, l, m, n expressimus, notari convenit fieri:

$$cos\,(\mu + \theta + \varphi) = \frac{-cos\,l\,cos\,m\,cos\,(\lambda+\theta+\varphi) + cos\,n\,si\,(\lambda+\theta+\varphi)}{si\,l\,si\,m}$$

$$cos\,(\nu + \theta + \varphi) = \frac{-cos\,l\,cos\,n\,cos\,(\lambda+\theta+\varphi) - cos\,m\,si\,(\lambda+\theta+\varphi)}{si\,l\,si\,n}$$

$$si\,(\mu + \theta + \varphi) = \frac{-cos\,l\,cos\,m\,si\,(\lambda+\theta+\varphi) - cos\,n\,cos\,(\lambda+\theta+\varphi)}{si\,l\,si\,m}$$

$$si\,(\nu + \theta + \varphi) = \frac{-cos\,l\,cos\,n\,si\,(\lambda+\theta+\varphi) + cos\,m\,cos\,(\lambda+\theta+\varphi)}{si\,l\,si\,n}.$$

Ac simili modo anguli $\mu + \varphi + \xi$ et $\nu + \varphi + \xi$ ad angulum $\lambda + \varphi + \xi$ revocari possunt. Deinde etiam pro sequentibus reductionibus haec forma imprimis est notanda

$$si\,(\mu + B)\; cos\,(\nu + C) = si\,(\nu + B)\; cos\,(\mu + C)$$

quae ob $si\,M\; cos\,N = \frac{1}{2}\, si\,(M + N) + \frac{1}{2}\, si\,(M - N)$ reducitur ad $si\,(\mu - \nu)\; cos\,(B - C)$; hocque modo reductionem pro aliis formulis instituendo, reperimus:

$$si\,(\mu + B)\; cos\,(\nu + C) - si\,(\nu + B)\; cos\,(\mu + C) = si\,(\mu - \nu)\; cos\,(B - C)$$

$$si\,(\mu + B)\; si\,(\nu + B) - si\,(\nu + B)\; si\,(\mu + C) = -si\,(\mu - \nu)\; si\,(B - C)$$

$$cos\,(\mu + B)\; cos\,(\nu + C) - cos\,(\nu + B)\; cos\,(\mu + C) = -si\,(\mu - \nu)\; si\,(B - C)$$

ubi $si\,(\mu - \nu)$ per formulas usurpatas datur, est enim $si\,(\mu - \nu) = \frac{cos\,l}{si\,m\,si\,n}$.

PROBLEMA. 18.

1048. Si globus ex materia uniformi constet: vel saltem ita fuerit comparatus, ut omnia momenta inertiae sint inter se aequalia, eique initio impressus fuerit motus quicunque, determinare ejus continuationem.

SO-

SOLUTIO.

Cum hic fit $aa = bb = cc$, seu momentum inortiae respectu omnium diametrorum $= Maa$, prima aequatio integrata praebet $aap =$ Const. unde p erit quantitas constans. Statuatur ergo $p = h$: et ternae aequationes differentiales priores induent has formas:

I. $$-dq\,cof(\lambda+\theta+\varphi)+q(d\theta+d\varphi)\,fi(\lambda+\theta+\varphi)+\frac{2\delta fg}{aa}dt\,fi(\lambda+\varphi+\xi)=0$$

II. $$-dq\,cof(\mu+\theta+\varphi)+q(d\theta+d\varphi)\,fi(\mu+\theta+\varphi)+\frac{2\delta fg}{aa}dt\,fi(\mu+\varphi+\xi)=0$$

III. $$-dq\,cof(\nu+\theta+\varphi)+q(d\theta+d\varphi)\,fi(\nu+\theta+\varphi)+\frac{2\delta fg}{aa}dt\,fi(\nu+\varphi+\xi)=0$$

quarum autem sufficit binas considerasse, quia inde jam nata est conclusio $p = h$. Iam per superiores reductiones binae posteriores ita combinentur:

II. $cof(\nu+\theta+\varphi)$ − III. $cof(\mu+\theta+\varphi)$ praebet

$$q(d\theta+d\varphi)\,fi(\mu-\nu)+\frac{2\delta fg}{aa}dt\,fi(\mu-\nu)\,cof(\xi-\theta)=0$$

seu $$q(d\theta+d\varphi)+\frac{2\delta fg}{aa}dt\,cof(\xi-\theta)=0$$

Deinde II. $fi(\nu+\theta+\varphi)$ − III. $fi(\mu+\theta+\varphi)$ dat

$$dq\,fi(\mu-\nu)-\frac{2\delta fg}{aa}dt\,fi(\mu-\nu)\,fi(\xi-\theta)=0$$

seu $$dq=\frac{2\delta fg}{aa}dt\,fi(\xi-\theta)$$

qui valor in ultima aequatione pro viribus vivis substitutus praebet $xdx + ydy + zdz = qdq$

hincque $xx + yy + zz = ss =$ Const. $+ qq =$ Const. $+ ss\,fi\,s^2$ ita ut sit $ss\,cof\,s^2 =$ const. ut jam invenimus ob $s\,cof\,s = p = h$. Hinc istas habemus aequationes a litteris l, m, n, λ, μ, ν immunes:

$$\text{I. } q(d\theta+d\Phi)+\frac{2\delta fg}{aa}\,dt\ cof\ (\xi-\theta)=0\ ;\ \text{II. } dq=\frac{2\delta fg}{aa}\,dt\ fi\ (\xi-\theta)$$

$$\text{III. } dv=2\delta g dt\ cof\ \xi\ ;\ \text{IV. } vd\Phi=2\delta g dt\ fi\ \xi$$

quibus adjungatur haec finita $tang\ \xi=\frac{fq\ cof\ \theta}{v-fq\ fi\ \theta}$, quae transformata in hanc $v\ fi\ \xi-fq\ cof\ (\xi-\theta)=0$, differentietur

$$dv\ fi\ \xi+vd\xi\ cof\ \xi-fdq\ cof\ (\xi-\theta)+fqd\xi\ fi\ (\xi-\theta)-fqd\theta\ fi\ (\xi-\theta)=0.$$

Iam I. $fi\ (\xi-\theta)$ + II. $cof\ (\xi-\theta)$ dat

$$q(d\theta+d\Phi)\ fi\ (\xi-\theta)+dq\ cof\ (\xi-\theta)=0$$

quae per f multiplicata illi addatur

$$dv\ fi\ \xi+vd\xi\ cof\ \xi+fq(d\xi+d\Phi)\ fi\ (\xi-\theta)=0.$$

Porro ob $\frac{dv}{vd\Phi}=\frac{cof\ \xi}{fi\ \xi}$, erit

$$v(d\Phi+d\xi)\ cof\ \xi+fq(d\xi+d\Phi)\ fi\ (\xi-\theta)=0$$

seu $(d\Phi+d\xi)(v\ cof\ \xi+fq\ fi\ (\xi-\theta))=0$

quorum factorum finitus $v\ cof\ \xi+fq\ fi\ (\xi-\theta)$ evanescere nequit, ob $v\ fi\ \xi-fq\ cof\ (\xi-\theta)=0$, sequeretur enim inde $v\ cof\ \theta=0$, et $fq\ cof\ \theta=0$; quod nonnisi casu $\theta=90°$ locum habet. Relinquitur ergo ut sit $d\Phi+d\xi=0$ ideoque $\Phi+\xi=$ Const.

Hoc impetrato reliqua non difficulter expedientur; ad integrationes autem determinandas pro statu initiali $t=0$, ponamus fuisse celeritatem progressivam $v=e$, ang. $\Phi=0$; ang. PZO $=\theta=f$, arcum ZO $=s=\mathfrak{f}$; et celeritatem angularem $\varkappa=\varepsilon$ in sensum ACB; hincque $p=h=\varkappa\ cof\ s=\varepsilon\ cof\ \mathfrak{f}$, et $q=\varepsilon\ fi\ \mathfrak{f}$; porro $tang\ \xi=\frac{\varepsilon f fi\mathfrak{f}\ cof\mathfrak{h}}{e-\varepsilon f fi\mathfrak{f}\ fi\mathfrak{h}}$. Statuatur $\frac{\varepsilon f fi\mathfrak{f}\ cof\mathfrak{h}}{e-\varepsilon f fi\mathfrak{f}\ fi\mathfrak{h}}=tang\ \zeta$ ut fuerit initio $\xi=\zeta$, ac perpetuo erit $\xi+\Phi=\zeta$, ita ut angulus DZQ $=\zeta$ maneat constans. Quare cum sit $\xi=\zeta-\Phi$: erit $v\ fi\ (\zeta-\Phi)=fq\ cof\ (\zeta-\theta-\Phi)$. Supra autem invenimus:

$$\frac{d.v\ cof\Phi}{2gdt}=\delta\ cof\ (\xi+\Phi)=\delta\ cof\ \zeta\ ;\ \text{et}\ \frac{d.v\ fi\Phi}{2gdt}=\delta\ fi\ (\xi+\Phi)=\delta\ fi\ \zeta,$$

unde

unde integrando colligimus

$$v \cos\Phi = e + 2\delta gt \cos\zeta \text{ et } v \sin\Phi = 2\delta gt \sin\zeta$$

hincque $v = r$ $(ee + 4\delta egt \cos\zeta + 4\delta\delta gg\, tt)$ et $tang\, \Phi = \frac{2\delta gt \sin\zeta}{e + 2\delta gt \cos\zeta}$

atque $tang\,(\zeta - \Phi) = \frac{e \sin\zeta}{e\cos\zeta + 2\delta gt} = \frac{fq\cos\theta}{v - fq\sin\theta} = tang\, \xi.$

Deinde ob $d\Phi = -d\xi$ binae priores aequationes abeunt in

$$\text{I. } q(d\xi - d\theta) = \frac{2\delta fg}{aa} dt \cos(\xi - \theta) \text{ ; II. } dq = \frac{2\delta fg}{aa} dt \sin(\xi - \theta),$$

quarum haec per illam divisa dat:

$\frac{dq}{q(d\xi - d\theta)} = \frac{\sin(\xi-\theta)}{\cos(\xi-\theta)}$, quae integrata dat $q \cos(\xi - \theta) =$ Const.

ideoque $q \cos(\xi - \theta) = \varepsilon \sin\mathfrak{f} \cos(\zeta - \mathfrak{h})$, unde valor ipsius q in prima substitutus praebet:

$$\frac{\varepsilon(d\xi - d\theta)\sin\mathfrak{f}\cos(\zeta-\mathfrak{h})}{\cos(\xi-\theta)^2} = \frac{2\delta fg}{aa} dt, \text{ et integrando}$$

$$\varepsilon \sin\mathfrak{f} \cos(\zeta - \mathfrak{h})\, tang\,(\xi - \theta) = C + \frac{2\delta fg}{aa} t,$$

ubi $C = \varepsilon \sin\mathfrak{f} \sin(\zeta - \mathfrak{h})$. At $tang\,(\xi - \theta) = tang\,(\zeta - \Phi - \theta)$

$= \frac{tang(\zeta - \Phi) - tang\,\theta}{1 + tang\,\theta\, tang(\zeta - \Phi)}$, et $tang\,\theta = \frac{tang\,\xi - tang(\xi - \theta)}{1 + tang\,\xi\, tang(\xi - \theta)}$.

Sed per hypothesin est $\varepsilon \sin\mathfrak{f} = \frac{e\sin\zeta}{f\cos(\zeta - \mathfrak{h})}$, unde fit

$tang\,(\xi - \theta) = tang\,(\zeta - \mathfrak{h}) + \frac{2\delta ffgt}{eau\sin\zeta}$, at $tang\,\xi = \frac{e\sin\zeta}{e\cos\zeta + 2\delta gt}$

hinque angulus θ facile determinatur: indeque $q = \frac{e\sin\zeta}{f\cos(\xi - \theta)}$.

Verum hic notari oportet, cum sit $tang\,\zeta = \frac{\varepsilon f \sin\mathfrak{f}\cos\mathfrak{h}}{e - \varepsilon f \sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h}}$, esse ut supra de angulo ξ ostendimus,

$$\sin\zeta = \frac{-\varepsilon f \sin\mathfrak{f} \cos\mathfrak{h}}{r\,(ee - 2e\varepsilon f \sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff \sin\mathfrak{f}^2)} \text{ et } \cos\zeta = \frac{-e + \varepsilon f \sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h}}{r\,(ee - 2\varepsilon e f \sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff \sin\mathfrak{f}^2)}$$

$$\text{unde } \cos(\zeta - \mathfrak{h}) = \frac{-e\cos\mathfrak{h}}{r\,(ee - 2\varepsilon e f \sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff \sin\mathfrak{f}^2)}.$$

His inventis cum sit $\varkappa \cos s = \varepsilon \cos\mathfrak{f}$ et $\varkappa \sin s = q$, erit $\varkappa = r\,(qq + \varepsilon\varepsilon \cos\mathfrak{f}^2)$ et $\tang s = \frac{q}{\varepsilon \cos\mathfrak{f}}$. Sicque tam motus progressivus, quam ad quodvis tempus axis gyrationis O cum celeritate angulari $\varkappa$ poterit assignari, id quod ad motus cognitionem sufficit. Determinatio autem situs punctorum A, B, C ad quodvis tempus nimis est ardua, quam ut eam perficere liceat.

COROLL. 1.

1049. Cum sit celeritas angularis $\varkappa = \frac{\varepsilon \cos\mathfrak{f}}{\cos s}$, seu cosinui arcus SO reciproce proportionalis; sequitur, si polus gyrationis O initio fuerit in superiori hemisphaerio DZE, eum nunquam in inferius pervenire posse: in transitu enim per circulum horizontalem DE prodiret celeritas angularis $\varkappa$ infinita.

COROLL. 2.

1050. Ob eandem rationem, si polus gyrationis O initio fuerit in hemisphaerio inferiori DTE, is nunquam in superius ascendet. Sin autem initio fuerit in ipso circulo horizontali DE, perpetuo in eodem manebit. Scilicet si initio axis gyrationis fuerit horizontalis, perpetuo horizontalis manebit.

COROLL. 3.

1051. Si fuerit initio angulus $DZO = \mathfrak{h}$ rectus, fiet $\sin\zeta = 0$ et ob $\tang(\zeta - \mathfrak{h}) = \frac{\varepsilon f \sin\mathfrak{f} - e\sin\mathfrak{h}}{e\cos\mathfrak{h}}$, erit etiam $\xi - \theta$ rectus. Sed ob $\tang \xi = \frac{e\sin\zeta}{e\cos\zeta + 2\delta g t}$, angulus ξ evanescit, unde angulus $\theta = PZO$ prodit rectus. Simulatque igitur angulus PZO factus fuerit rectus, perpetuo rectus manebit.

CO-

COROLL. 4.

1052. Memorabilis eſt etiam proprietas, quod angulum $\xi + \varphi$ ſeu DZQ et in fig. 140. angulus DIQ ſit conſtans. Recta enim QIS ſibi perpetuo manebit parallela, et quia globus in motu progreſſivo ſollicitatur vi conſtante $\int M$ ſecundum eandem directionem IS, curva ab eo deſcripta GI parabola ſit neceſſe eſt.

SCHOLION. 1.

1053. Hic autem motus globi, uti noſtris formulis eſt definitus, diutius non durat, quam revera frictio adeſt, ſeu planum horizontale in puncto contactus T raditur. Si enim eveniat, ut ratio ceſſet, ſeu celeritas radens in T evaneſcat, ſubito frictio evaneſcit, formulaeque inventae non amplius locum habent. Tum igitur globus motu tam progreſſivo, quam gyratorio uniformiter in directum progredietur, neque axis gyrationis ullam amplius mutationem patietur. Ac ſi ſtatim initio motus globo impreſſus ita fuerit comparatus, ut frictio fuerit nulla, quod evenit, ſi tam $\varepsilon f \sin f \cos \eta = 0$ quam $e = \varepsilon f \sin f \sin \eta$, deinceps etiam globus nullam frictionem ſentiet, et ſtatim ab initio motum progreſſivum uniformiter in directum proſequetur, ſimulque uniformiter circa eundem axem gyrabitur. Verum ſi corpori ab initio alius motus quicunque fuerit impreſſus, ſemper aliquo tempore elapſo eo reducetur, ut frictio evaneſcat, indeque motum ſuum uniformiter proſequetur; quod memorabile temporis punctum in ſequenti problemate inveſtigabimus.

SCHOLION. 2.

1054. Quae in ſolutione problematis elicuimus, huc redeunt: Ex motu primum impreſſo habemus celeritatem motus progreſſivi $= e$ ſecundum directionem DI: ac ſi gyretur circa axem IO celeritate angulari ε in ſenſum ACB ſeu ZETD, qui ſenſus *antrorſum tendens* dici ſolet, fueritque arcus $ZO = f$ et angulus $DZO = \eta$: tum vero radius globi ſit $= f$ ejusque momentum inertiae $= Maa$ reſpectu omnium diametrorum, exiſtente M ejus maſſa: ex his datis colligitur celeritas radens in puncto contactus $= \gamma\gamma (ee - 2\varepsilon e f \sin f \sin \eta + \varepsilon\varepsilon ff \sin f^2)$ Fig. 139.

quae ſi ponatur $= k$, quaeratur angulus ζ, ut ſit $\sin \zeta = \frac{-\varepsilon f \sin f \cos \eta}{k}$ et $\cos \zeta = \frac{\varepsilon f \sin f \sin \eta - e}{k}$, qui ſit $DZQ = \zeta$, eritque IQ directio motus radentis.

Tum ſi elapſo tempore t globi centrum proferatur celeritate v ſecundum directionem PI; et gyretur celeritate angulari $= \varkappa$ in ſenſum ZETD circa polum O, ponaturque DZP $= \varphi$, PZO $= \theta$, et ZO $= \iota$: invenimus primo: $tang\ \varphi = \frac{2\delta g t \, ſi\zeta}{e + 2\delta g t \, coſ\zeta}$ et celeritatem centri D $= \gamma\,(ee + 4\delta e g t \, coſ\zeta + 4\delta\delta g g t t)$, at celeritas radens etiamnum fiet in directione IQ, exiſtente DZQ $= \zeta$: unde poſito PZQ $= \xi$ erit $tang\ \xi = \frac{e ſi\zeta}{e\, coſ\zeta + 2\delta g t}$. Porro eſt $tang\,(\xi - \theta) = tang\,(\zeta - \mathfrak{h}) + \frac{2\delta ff g t}{e a a ſi\zeta}$ exiſtente $tang\,(\zeta - \mathfrak{h}) = \frac{\varepsilon f ſi\mathfrak{f} - e ſi\mathfrak{h}}{e\, coſ\mathfrak{h}}$, unde angulus θ innoteſcit, hincque ob DZO $= \varphi + \theta = \zeta - \xi + \theta$ concluditur $tang$ DZO $= tang\,(\varphi + \theta) = \frac{\varepsilon a a k ſi\mathfrak{f} ſi\mathfrak{h} + 2\delta f g t (e - \varepsilon f ſi\mathfrak{f} ſi\mathfrak{h})}{\varepsilon a a k ſi\mathfrak{f}\, coſ\mathfrak{h} - 2\delta e ff g t ſi\mathfrak{f}\, coſ\mathfrak{h}}$. Atque ex his tandem nacti ſumus:

$$\varkappa\, coſ s = \varepsilon\, coſ\mathfrak{f} \text{ et } \varkappa ſi s = \frac{e ſi\zeta}{f\, coſ(\xi - \theta)}.$$

Denique pro celeritate radente ſecundum IQ, ea eſt $= \gamma\,(vv - 2\varkappa f v ſi s ſi\theta + \varkappa\varkappa ff ſi s^2)$; quae ſi vocetur $= w$, ſupra oſtendimus eſſe

$$ſi\xi = \frac{-\varkappa f ſi s\, coſ\theta}{w} \text{ et } coſ\xi = \frac{\varkappa f ſi s ſi\theta - v}{w},$$

unde $\varkappa$ et s definiuntur. Sed pro ſitu punctorum A, B, C in globo fixorum ad quodvis tempus determinando formulae adeo fiunt intricatae, ut nihil inde concludi queat. Interim ſi pro puncto A vocetur ZA $= l$ et EZA $= \lambda$, ad has binas aequationes totum negotium reducitur:

$$\text{I. } dl = dt\,(\varepsilon ſi\mathfrak{f} ſi(\mathfrak{h} + \lambda) - \frac{2\delta f g t}{aa} coſ(\zeta + \lambda))$$

$$\text{II. } d\lambda\, ſi l = \varepsilon dt\, coſ\mathfrak{f} ſi l + dt\, coſ l\,(\varepsilon ſi\mathfrak{f}\, coſ(\mathfrak{h} + \lambda) + \frac{2\delta f g t}{aa} ſi(\zeta + \lambda))$$

quarum reſolutio vereor ne fruſtra ſuſcipiatur. Cum autem ad quodvis tempus axem gyrationis cum celeritate angulari aſſignare valeamus, quod ad motus cognitionem, qualis vulgo deſideratur, ſufficere poteſt, eo magis mirum videtur, quod motus ſingulorum globi punctorum quaſi vires analyſeos ſuperet. Multo minus igitur de motu globorum,

rum, in quibus momenta inertiae non ſunt aequalia, quicquam definire licebit.

PROBLEMA. 19.

1055. Si globo, cujus omnia momenta inertiae ſunt inter ſe aequalia, motus quicunque fuerit impreſſus, aſſignare temporis punctum, ubi celeritas radens ideoque frictio evaneſcit, indeque globus motu uniformi progredi pergat.

SOLUTIO.

Supra §. 1039. vidimus, ut attritus evaneſcat, has duas requiri conditiones, alteram $\alpha \beta \gamma \sin s \cos \theta = 0$ alteram $v = f \alpha \beta \gamma \sin s \sin \theta$, ſeu in expreſſione $tang\ \xi = \frac{f \alpha \beta \gamma \sin s \cos \theta}{v - f \alpha \beta \gamma \sin s \sin \theta}$ tam numeratorem quam denominatorem ſimul evaneſcere debere. Cum autem invenerimus $tang\ \xi = \frac{e \sin \zeta}{e \cos \zeta + 2 \delta g t}$, ubi numerator $e \sin \zeta$ eſt conſtans, ſi in illa formula numerator evaneſcit, neceſſe eſt denominator ſimul evaneſcat, quia alioquin aequalitas inter has duas fractiones ſubſiſtere nequit. Unde poſitio $\cos \theta = 0$ tempus quaeſitum declarabit. Verum idem luculentius determinabimus, ſi ad quodvis tempus elapſum t celeritatem radentem w inveſtigemus. Cum igitur ex formula $\sin \xi = \frac{-\alpha f \gamma \sin s \cos \theta}{w}$ ſit $w = \frac{-\alpha f \gamma \sin s \cos \theta}{\sin \xi}$, quae expreſſio, ob $\alpha \gamma \sin s = \frac{e \sin \zeta}{f \cos (\xi - \theta)}$, abit in $w = \frac{-e \sin \zeta \cos \theta}{\sin \xi \cos (\xi - \theta)}$: atque ob $\alpha = \xi - (\xi - \theta)$ in hanc $w = -e \sin \zeta \, (\cot \xi + tang\ (\xi - \theta))$, ſi hic pro $tang\ \xi$ et $tang\ (\xi - \theta)$ valores ſupra inventos ſubſtituamus, reperiemus:

$$w = -\left(e \cos \zeta + 2 \delta g t + e \sin \zeta \, tang\ (\zeta - \mathfrak{h}) + \frac{2 \delta f f g t}{a a}\right).$$

At $\cos \zeta + \sin \zeta \, tang\ (\zeta - \mathfrak{h}) = \frac{\cos \mathfrak{h}}{\cos (\zeta - \mathfrak{h})}$, et $\cos (\zeta - \mathfrak{h}) = \frac{-e \cos \mathfrak{h}}{k}$, unde $e \cos \xi + e \sin \zeta \, tang\ (\zeta - \mathfrak{h}) = -k$, ubi k denotat celeritatem radentem initialem. Quamobrem elapſo tempore t habebimus celeritatem radentem $w = k - 2 \delta g \left(1 + \frac{f f}{a a}\right) t$, ita ut ea labente tempore uniformiter

formiter decrescat. Tandem ergo certo evanescet, idque fiet elapso tempore $t = \frac{aak}{2\delta g(aa+ff)}$; eritque tum $cos\,\theta = 0$ et $\theta = 90° = PZO$. Quod ergo cum evenerit, videamus quomodo reliquae motus determinationes se sint habiturae: et quoniam $2\delta gt = \frac{aak}{aa+ff}$, erit $tang\,\varphi = \frac{aak\,sin\,\zeta}{e(aa+ff)+aak\,cos\zeta}$ et $tang\,\xi = \frac{e(aa+ff)\,tang\,\zeta}{e(aa+ff)+aak}$. Hinc fit $\varkappa\,sin\,s = \frac{e\,sin\,\zeta}{f\,sin\,\xi}$. Cum autem sit $v = r\left(ee + \frac{2aaek\,cos\zeta}{aa+ff} + \frac{a^4kk}{(aa+ff)^2}\right)$; erit $sin\,\varphi = \frac{aak\,sin\zeta}{(aa+ff)\,v}$ et $cos\,\varphi = \frac{e(aa+ff)+aak\,cos\zeta}{(aa+ff)\,v}$; atque $sin\,\xi = \frac{e\,sin\,\zeta}{v}$, ideoque $\varkappa\,sin\,s = \frac{v}{f}$. Porro quia $\varkappa\,cos\,s = e\,cos\,\mathfrak{f}$, erit $tang\,s = \frac{v}{\varepsilon f\,cos\,\mathfrak{f}}$ et $\varkappa = r\left(\frac{vv}{ff} + ee\,cos\,\mathfrak{f}^2\right)$ seu $\varkappa = \frac{r(eeff+2\varepsilon eaaf\,sin\,\mathfrak{f}\,sin\,\mathfrak{h}+\varepsilon\varepsilon a^4\,sin\,\mathfrak{f}^2+\varepsilon\varepsilon(aa+ff)^2\,cos\,\mathfrak{f}^2)}{aa+ff}$

ob $kk = ee - 2\varepsilon ef\,sin\,\mathfrak{f}\,sin\,\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff\,sin\,\mathfrak{f}^2$.

COROLL. 1.

1056. Quo major ergo initio fuerit celeritas radens k, eo diutius motus durat, antequam cessante frictione ad uniformitatem redigatur. Ac si globus constet ex materia homogenea, fit $aa = \frac{2}{5}ff$, ideoque motus uniformitas incipit elapso tempore $t = \frac{k}{7\delta g}$ min. sec. hinc in hypothesi $\delta = \frac{1}{3}$ fit $t = \frac{3k}{7g}$, existente $g = 15\frac{5}{8}$ ped. Rhen.

COROLL. 2.

1057. Ut centrum globi eodem tempore ad quietem redigatur, status initialis ita comparatus esse debet, ut sit $cos\,\zeta = -1$ et $e = \frac{aak}{aa+ff}$. Fit ergo $k = e - \varepsilon f\,sin\,\mathfrak{f}\,sin\,\mathfrak{h}$, et $sin\,\mathfrak{h} = 1$; seu $\mathfrak{h} = 90°$; et $k = e - \varepsilon f\,sin\,\mathfrak{f}$; hinc que

hincque $\varepsilon \mathit{sin} f = \frac{-ef}{aa}$. Porro ob $v = 0$ fit $s = 0$; et $u = e \cos f$, qua celeritate angulari jam globus circa axem verticalem quieſcentem gyrabitur: elapſo ab initio tempore $t = \frac{e}{2\delta g}$ min. ſec.

COROLL. 3.

1058. Hoc autem caſu, quo initio eſt $\mathfrak{h} = 90°$, et $e = \frac{-ef}{aa \sin f}$, fit $\zeta = 180$; $\varphi = 0$; $\xi = 180$; $\theta = 90°$; $v = e - 2\delta g t$; tum vero $u \cos s = \frac{-ef \cos f}{aa \sin f}$; $u \sin s = \frac{-ef}{aa}\left(1 - \frac{2\delta g t}{e}\right)$, hincque $\mathit{tang}\ s = \left(1 - \frac{2\delta g t}{e}\right) \mathit{tang}\ f$ et $u = \frac{-ef}{aa \sin f}\sqrt{\left(1 - \frac{4\delta g t}{e} \sin f^2 + \frac{4\delta\delta g g t t}{ee} \sin f^2\right)}$. At initio erat celeritas radens $k = e\left(1 + \frac{ff}{aa}\right)$, elapſo autem tempore t ea eſt $w = \left(1 + \frac{ff}{aa}\right)(e - 2\delta g t)$, ſicque poſito $t = \frac{e}{2\delta g}$ ſimul fit $w = 0$, $v = 0$ et $s = 0$, ut ante.

COROLL. 4.

1059. Ne valor $u \sin s = \frac{e \sin \zeta}{f \cos(\xi - \theta)}$ indefinitus videatur, quod fit ſi numerator ac denominator evaneſcant, ſeu $\zeta = 0$, conveniet loco $\sin \zeta$ et $\cos(\xi - \theta)$ valores ex ſuperioribus ſubſtitui, atque hinc reperietur:

$$u \sin s = \sqrt{\left(ee \sin f^2 - \frac{4\delta e f g t \sin f (ef \sin f - e \sin \mathfrak{h})}{aak} + \frac{4\delta\delta ff g g t t}{a^4}\right)}$$

unde ob $u \cos s = e \cos f$ prodit:

$$uu = ee - \frac{4\delta e f g t \sin f (ef \sin f - e \sin \mathfrak{h})}{aak} + \frac{4\delta\delta ff g g t t}{a^4}.$$

COROLL. 5.

1060. Cum ſit vis viva globi $= M(vv + aa\,uu)$, erat ea initio $= M(ee + ee\,aa)$, elapſo autem tempore t ea erit $=$

$$M\left(ee + \varepsilon\varepsilon\, aa - 4\delta gkt + 4\left(1 + \frac{ff}{aa}\right)\delta\delta\, gg\, tt\right).$$

At elapso tempore $t = \dfrac{aak}{2\delta g(aa+ff)}$, vis viva fiet $= \dfrac{M(eeff + 2\varepsilon eaaf\,\mathrm{si}\,\mathfrak{f}\,\mathrm{si}\,\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon aa(aa+ff\,\mathrm{cos}\,\mathfrak{f}^2))}{aa+ff}$, cujus defectus ab initiali est $= \dfrac{Maa(ee - 2\varepsilon ef\,\mathrm{si}\,\mathfrak{f}\,\mathrm{si}\,\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff\,\mathrm{si}\,\mathfrak{f}^2)}{aa+ff} = \dfrac{Maakk}{aa+ff}$, ita ut ista vis viva sit $= M\left(ee + \varepsilon\varepsilon\, aa - \dfrac{aakk}{aa+ff}\right)$.

SCHOLION.

1061. Ex his ergo formulis totus motus globi assignari potest, quicunque motus ei initio fuerit impressus: interim tamen hae formulae non parum sunt complexae, unde ad clariorem explicationem haud abs re erit, casus quosdam magis notabiles evolvi. Cujusmodi sunt, uti jam supra innuimus, duo potissimum, alter quo arcus ZO initio erat quadrans, alter vero quo angulus DZO $= \mathfrak{h}$ erat rectus: utrumque igitur seorsim explicemus.

PROBLEMA. 20.

1062. Si globo, in quo omnia momenta inertiae sunt aequalia, initio motus gyratorius circa axem horizontalem fuerit impressus praeter motum progressivum, definire continuationem motus.

SOLUTIO.

Fig. 139. Cum initio axis gyrationis fuerit horizontalis, erit $\mathfrak{f} = ZO = 90°$. Denotante ergo e celeritatem progressivam secundum directionem DIE, et ε celeritatem angularem circa axem IO in sensum ZETD, sit pro puncto O angulus DZO $= \mathfrak{h}$: manente $f =$ radio globi et Maa $=$ momento inertiae. Ex his erat initio celeritas radens $k = \gamma\,(ee - 2\varepsilon ef\,\mathrm{si}\,\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff)$ et pro ejus directione IQ angulus DZQ $= \zeta$ ut sit $\mathrm{si}\,\zeta$

Fig. 140. $= \dfrac{-\varepsilon f\,\mathrm{cos}\,\mathfrak{h}}{k}$ et $\mathrm{cos}\,\zeta = \dfrac{\varepsilon f\,\mathrm{si}\,\mathfrak{h} - e}{k}$. His pro statu initiali constitutis elapso tempore t centrum globi descripserit viam GI, ut jam sit in I ubi ejus celeritas secundum IR erit $= v = \gamma\,(ee + \dfrac{4\delta egt(\varepsilon f\,\mathrm{si}\,\mathfrak{h} - e)}{k} +$

4δδ

$4\delta\delta gg\,tt$); unde positis coordinatis GX $= X$ et XI $= Y$ ob *tang* EIR $= \frac{-2\delta\varepsilon fgt\cos\eta}{ek+2\delta gt(\varepsilon f\sin\eta-e)}$ erit $dX = edt + \frac{2\delta gt\,dt}{k}(\varepsilon f\sin\eta - e)$ et $dY = \frac{-2\delta\varepsilon fgt\,dt\cos\eta}{k}$, ideoque GX $= X = et + \frac{\delta gkt}{k}(\varepsilon f\sin\eta - e)$ et XI $= Y = \frac{-\delta\varepsilon fgtt}{k}\cos\eta$. Tum vero pro motu Fig. 139 gyratorio, qui jam fiat in sensum ZETD celeritate angulari $= \gamma$ circa polum O existente ZO $= s$, PZO $= \theta$, et DZQ $= \varphi + \xi$, ubi IQ refert directionem celeritatis radentis, quia constanter est $\varphi + \xi = \zeta$, seu directio IQ constans, erit *tang* $\xi = \frac{-\varepsilon f\cos\eta}{ee f\sin\eta - ee + 2\delta gkt}$, et *tang* $(\xi - \theta) = \frac{\varepsilon f - e\sin\eta}{e\cos\eta} - \frac{2\delta fgkt}{ee\,aa\cos\eta}$, unde ambo anguli ξ et θ definiuntur. Vel erit *tang* $(\varphi + \theta) = \frac{\varepsilon aakf\sin\eta + 2\delta fgt(e - \varepsilon f\sin\eta)}{\varepsilon aak\cos\eta - 2\delta\varepsilon ffgt\cos\eta}$.

Celeritas autem radens secundum directionem IQ est $w = k - 2\delta g\,(1 + \frac{ff}{aa})\,t$. Tum vero ob $\gamma\cos s = 0$, erit arcus ZO $= s$ quadrans, et $\gamma = r\,(\varepsilon\varepsilon - \frac{4\delta\varepsilon fgt(\varepsilon f - e\sin\eta)}{aak} + \frac{4\delta\delta ffggtt}{a^4})$.

Hic motus inaequabilis autem tantum durabit per tempus $t = \frac{aak}{2\delta g(aa+ff)}$, quo elapso est *tang* $\varphi = \frac{-\varepsilon aaf\cos\eta}{e(aa+ff)+aa(\varepsilon f\sin\eta - e)}$ $= \frac{-\varepsilon aa\cos\eta}{ef+\varepsilon aa\sin\eta} = r\,(ee + \frac{2aae(\varepsilon f\sin\eta - e)}{aa+ff} + \frac{a^4kk}{(aa+ff)^2})$, $= 90°$, et $\gamma = \frac{v}{f} = \frac{r(eeff+2\varepsilon eaaf\sin\eta+\varepsilon\varepsilon a^4)}{aa+ff}$, substituto pro kk valore. Tum autem fit angulus $\theta = 90°$, et $\sin\xi = \frac{e\sin\zeta}{v}$.

COROLL. 1.

1063. Si initio fuerit angulus DZO $= f = 0$, erit $k = r\,(ee + \varepsilon\varepsilon ff)$ pro

pro angulo DZQ $= \zeta$ fit $\sin\zeta = \frac{-\varepsilon f}{k}$; $\cos\zeta = \frac{-e}{k}$; tum poſt temp̃us t prodit $v = r\,(ee - \frac{4\delta e e g t}{k} + 4\delta\delta gg\,tt)$; $tang\ \varphi = \frac{-2\delta\varepsilon f g t}{e(k-2\delta g t)}$; $X = et\,(1 - \frac{\delta g t}{k})$, $Y = \frac{-\delta\varepsilon f g t t}{k}$. Porro $tang\ \xi = \frac{\varepsilon e f}{ee - 2\delta g k t}$; $tang\,(\xi - \theta) = \frac{\varepsilon f}{e} - \frac{2\delta f g k t}{\varepsilon e a a}$ $tang\,(\varphi + \theta) = \frac{2\delta e f g t}{\varepsilon a a k - 2\delta\varepsilon f f g t}$: $\gamma = r\,(\varepsilon\varepsilon - \frac{4\delta\varepsilon\varepsilon f f g t}{a a k} + \frac{4\delta\delta f f g g t\,t}{a^4})$ et $w = k - 2\delta g\,(1 + \frac{ff}{aa})\,t$.

Elapſo autem tempore $t = \frac{a a k}{2\delta g(aa+ff)}$ erit $tang\,\varphi = \frac{-\varepsilon a a}{ef}$; $v = \frac{fr(eeff+\varepsilon\varepsilon a^4)}{aa+ff} = f\gamma$; $\theta = 90°$ et $tang\ \xi = \frac{\varepsilon e f(aa+ff)}{ee(aa+ff) - aakk}$

$\varepsilon e(aa+ff)$

$= f(ee - \varepsilon\varepsilon aa)$.

COROLL. 2.

1064. Si angulus DZO $= \varphi$ eſſet $= 180°$, eaedem formulae motum indicabunt, ſumta celeritate angulari ε negativa ſeu motu gyratorio in contrarium verſo. At ſi ſit $\varepsilon = 0$, ſeu globo ſolus motus progreſſivus fuerit impreſſus, fit $k = e$, $\zeta = 180°$, $v = e - 2\delta g t$; $\varphi = 0$, $X = t\,(e - \delta g t)$, $Y = 0$; $\xi = 180°$; $\theta = 90°$, $\gamma = \frac{2\delta f g t}{aa}$; et elapſo tempore $t = \frac{aae}{2\delta g(aa+ff)}$, fit $v = \frac{eff}{aa+ff}$, $\gamma = \frac{ef}{aa+ff}$ et $X = \frac{et(aa+2ff)}{2(aa+ff)} = \frac{aaee(aa+2ff)}{4\delta g(aa+ff)^2}$

SCHOLION.

1065. Caſus hic, quo globus initio nullum motum gyratorium eſt adeptus, in genere valet, neque ad ullam hypotheſin angulorum φ et ζ eſt adſtrictus. Tum igitur globus in directum progreditur motu progreſſivo

greſſivo retardato, motumque paulatim gyratorium accipiet, donec elapſo tempore $t = \frac{aae}{2\delta g(aa+ff)}$ motum uniformem acquirat, quo deinceps continuo progrediatur. Hinc deducimur ad caſum, quo globus initio motum tantum gyratorium acceperit ſine ullo motu progreſſivo, cujus evolutio eſt facilis. Poſito enim $\varepsilon = 0$, erit $k = ef \mathfrak{ſ} f$, hincque fit $\mathfrak{ſ}\zeta = -\mathfrak{cof}\,\eta$ et $\mathfrak{cof}\,\zeta = \mathfrak{ſ}\,\eta$, ergo $\zeta = \eta - 90°$: ubi pro axe gyrationis initio impreſſae IO eſt $ZO = f$ et $DZO = \eta$, exiſtente celeritate angulari in ſenſum $ZETD = \varepsilon$. Elapſo ergo tempore t fit $\Phi = \zeta$, ſcilicet ſublato ab angulo $DZO = \eta$ angulo recto PZO, erit PI directio motus progreſſivi, quem globus acquiret, cujus celeritas erit $v = 2\delta gt$, ideoque tempori proportionalis. Tum vero erit $tang\,\xi = 0$ et $tang\,(\xi - \theta) = \infty$, ergo ob $\Phi + \xi = \zeta = \eta - 90°$, erit $\xi = 0$, et $\theta = 90°$; hinc $DZO = \zeta + 90 = \eta$, ita ut polus gyrationis O in eodem perpetuo circulo verticali reperiatur. Denique ex §. 1059. eſt $\varkappa \mathfrak{ſ} s = r\left(\varepsilon\mathfrak{ſ}\,f^2 - \frac{4\delta\varepsilon fgt\mathfrak{ſ}f}{aa} + \frac{4\delta\delta ffggtt}{a^4}\right) = \varepsilon\mathfrak{ſ}\,f - \frac{2\delta fgt}{aa}$ et $\varkappa \mathfrak{cof}\,s = \varepsilon\,\mathfrak{cof}\,f$, unde fit $tang\,s = tang\,f - \frac{2\delta fgt}{\varepsilon aa\,\mathfrak{cof}\,f}$, ita ut arcus ZO diminuatur, niſi fuerit quadrans vel eo major, et $\varkappa = r\left(\varepsilon\varepsilon - \frac{4\delta fgt\mathfrak{ſ}f}{aa} + \frac{4\delta\delta ffggtt}{a^4}\right)$. Motus autem ad uniformitatem reducetur elapſo tempore $t = \frac{\varepsilon aaf\mathfrak{ſ}f}{2\delta g(aa+ff)}$; fitque tum $\varkappa = \frac{\varepsilon r(a^4\mathfrak{ſ}f^2 + (aa+ff)^2\mathfrak{cof}f^2)}{aa+ff}$; $v = \frac{\varepsilon aaf\mathfrak{ſ}f}{aa+ff}$ et $tang\,s = \frac{aa\,tang\,f}{aa+ff}$. Si ergo fuiſſet $f = 0$, ſeu globo motus gyratorius circa axem verticalem impreſſus eſſet ſine ullo motu progreſſivo, eundem motum ſine ulla mutatione eſſet conſervaturus.

PROBLEMA. 21.

1066. Si globo, in quo omnia momenta inertiae ſunt aequalia, motus gyratorius fuerit impreſſus circa axem ad motus progreſſivi directionem normalem; definire continuationem motus.

SOLUTIO.

Fig. 139. Cum motus progressivi initio impressi directio sit recta DIE, et celeritas $= e$, angulus DZO $= \mathfrak{h}$ est rectus, et sumto ZO $= f$ erat O polus circa quem initio globus accepit celeritatem angularem $= \varepsilon$ in sensum ZETD. Habemus ergo $k = \pm (e - \varepsilon f \mathfrak{si} f)$ ubi valorem positivum pro k sumi oportet: ita ut hic prodeant duo casus seorsim tractandi.

Casus I. Sit $e > \varepsilon f \mathfrak{si} f$, erit $k = e - \varepsilon f \mathfrak{si} f$, quae est celeritas radens initio, ejusque directio IQ, ut sit $\mathfrak{si}$ DQ $= 0$ et $\mathfrak{cos}$ DQ $= -1$ ideoque DQ $= \zeta = 180°$, et Q cadat in E: globusque a frictione δM secundum ID constanter retrahatur: unde statim colligitur globi centrum I in eadem recta DE esse incessurum. Elapso tempore t ergo ob $\mathfrak{cos}\zeta = -1$ fit celeritas centri $v = e - 2\delta g t$, et celeritas radens $w = e - \varepsilon f \mathfrak{si} f - 2\delta g \left(1 + \frac{ff}{aa}\right) t$: tum vero $\varphi = 0$ et $\xi = 180°$, atque $\theta = 90°$. Quare pro axe gyrationis praesente IO, est DIO $= 90°$, et posito arcu ZO $= s$ et celeritate angulari $= \gamma$ habemus $\gamma \mathfrak{cos} s = \varepsilon \mathfrak{cos} f$ et ex §. 1059. $\gamma \mathfrak{si} s = \varepsilon \mathfrak{si} f + \frac{2\delta f g t}{aa}$, unde colligitur $tang\ s = tang\ f + \frac{2\delta f g t}{\varepsilon aa \mathfrak{cos} f}$, et $\gamma = r\left(\varepsilon\varepsilon + \frac{4\delta\varepsilon f g t \mathfrak{si} f}{aa} + \frac{4\delta\delta f f g g t t}{a^4}\right)$. Hocque tempore t percurrit centrum I lineam rectam GX $= X = t(e - \delta g t)$. Hic autem motus inaequabilis durabit per tempus $t = \frac{aa(e - \varepsilon f \mathfrak{si} f)}{2\delta g(aa + ff)}$ quo elapso erit spatium $X = \frac{aa(e - \varepsilon f \mathfrak{si} f)(e(aa + 2ff) + \varepsilon aa f \mathfrak{si} f)}{2\delta g(aa + ff)^2}$, et celeritas $v = \frac{f(ef + \varepsilon aa \mathfrak{si} f)}{aa + ff}$. At pro motu gyratorio $tang\ s = tang\ ZO = tang\ f + \frac{f(e - ef \mathfrak{si} f)}{\varepsilon(aa + ff)\mathfrak{cos} f} = \frac{ef + \varepsilon aa \mathfrak{si} f}{\varepsilon(aa + ff)\mathfrak{cos} f}$, existente perpetuo DIO $= 90°$ et celeritas angularis

$$\gamma = \frac{r(eeff + 2\varepsilon e aa f \mathfrak{si} f + \varepsilon\varepsilon a^4 \mathfrak{si} f^2 + \varepsilon\varepsilon(aa + ff)^2 \mathfrak{cos} f^2)}{aa + ff}.$$

Casus II. Sit $e < \varepsilon f \mathfrak{si} f$ seu $k = \varepsilon f \mathfrak{si} f - e$, quae est celeritas radens initio, ejusque directio IQ talis ut sit $\mathfrak{si}$ DQ $= 0$ et $\mathfrak{cos}$ DQ $= 1$, ergo

ergo $DQ = \zeta = o$, et Q in D cadat. Globus ergo a frictione δM secundum directionem IE conſtanter acceleratur, ejusque centrum I in eadem recta IE progreditur: atque elapſo tempore t erit ejus celeritas $v = e + 2\delta gt$, et celeritas radens $w = \varepsilon f \sin f - e - 2\delta g\left(1 + \frac{ff}{aa}\right) t$. Tum vero fit $\varphi = o$ et $\xi = o$, atque $\theta = 90°$. Quare pro axe gyrationis praeſente IO eſt $DIO = 90°$, et poſito arcu $ZO = s$ et celeritate angulari $= \gamma$ habemus $\gamma \cos s = \varepsilon \cos f$ et $\gamma \sin s = \varepsilon \sin f - \frac{2\delta fgt}{aa}$,

unde fit $tang\, s = tang\, f - \frac{2\delta fgt}{\varepsilon aa \cos f}$ et $\gamma = r\left(\varepsilon\varepsilon - \frac{4\delta\varepsilon fgt \sin f}{aa} + \frac{4\delta\delta ffggtt}{a^4}\right)$ hocque tempore t centrum globi percurrit lineam rectam $GX = X = t(e + \delta gt)$. Hic autem motus inaequabilis durabit tantum tempore $t = \frac{aa(\varepsilon f \sin f - e)}{2\delta g(aa + ff)}$, quo elapſo erit celeritas $v = \frac{f(ef - \varepsilon aa \sin f)}{aa + ff}$, et ſpatium $X = \frac{aa(\varepsilon f \sin f - e)(e(aa + 2ff) + \varepsilon aaf \sin f)}{2\delta g(aa + ff)^2}$. At pro motu gyratorio reperitur $tang\, s = tang\, ZO = \frac{ef + \varepsilon aa \sin f}{\varepsilon(aa + ff)\cos f}$ exiſtente perpetuo $DIO = 90°$, et celeritas angularis

$$\gamma = \frac{r(ee ff + 2\varepsilon e aa f \sin f + \varepsilon\varepsilon a^4 \sin f^2 + \varepsilon\varepsilon(aa + ff)^2 \cos f^2)}{(aa + ff)}.$$

COROLL. 1.

1067. Si fuerit $e = \varepsilon f \sin f$, globus ſtatim ab initio motum proſequetur uniformem, tam progreſſivum quam gyratorium, qui caſus limitem conſtituit inter binos tractatos.

COROLL. 2.

1068. Ad priorem caſum quo $e > \varepsilon f \sin f$ referendi ſunt ii, quibus ε habet valorem negativum, ſeu globo impreſſus fuerit initio motus gyratorius in ſenſum ZDTE. Poſito autem $-\varepsilon$ loco ε, fieri poteſt, ut globus

globus revertatur, antequam ad uniformitatem pervenerit: ſcilicet ſi fuerit $\varepsilon > \frac{ef}{aa\sin f}$.

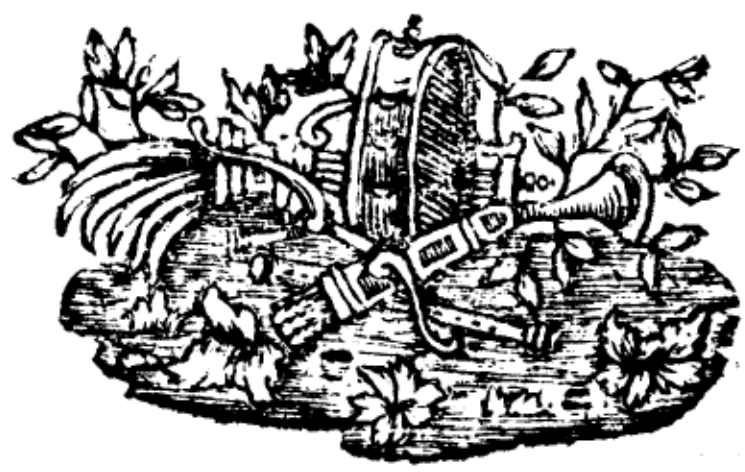
COROLL. 3.

1069. Caſu hoc, quo ε negative capitur, habebimus ad tempus t: $\varphi = 0$, $\theta = 0$, $\xi = 180$, $v = e - 2\delta gt$; $w = e + \varepsilon f \sin f - 2\delta g\left(1 + \frac{ff}{aa}\right)t$; $\tang s = \tang f - \frac{2\delta fgt}{\varepsilon aa\cos f}$; et $\gamma = r\left(\varepsilon\varepsilon - \frac{4\delta\varepsilon fgt\sin f}{aa} + \frac{4\delta\delta ffggtt}{a^4}\right)$. At poſt tempus $t = \frac{aa(e+\varepsilon ff\sin f)}{2\delta g(aa+ff)}$ percurſo ſpatio $X = \frac{aa(e+\varepsilon ff\sin f)(e(aa+2ff)-\varepsilon aaf\sin f)}{2\delta g(aa+ff)^2}$, uniformitatem attinget, eritque tum $v = \frac{f(ef-\varepsilon aa\sin f)}{aa+ff}$; $\tang s = \frac{\varepsilon aa\sin f - ef}{\varepsilon(aa+ff)\cos f}$ et $\gamma = \frac{r(e\varepsilon ff - 2\varepsilon eaaf\sin f + \varepsilon\varepsilon a^4\sin f^2 + \varepsilon\varepsilon(aa+ff)^2\cos f^2)}{aa+ff}$.

SCHOLION.

1070. Caſus hic praecipue eſt memorabilis, quo globo ejusmodi motus imprimi poteſt, ut primo recedat, mox autem iterum revertatur, quod experimento oſtendi ſolet, dum digito ad globum circa D applicato et deorſum preſſo duplex motus globo imprimitur, alter progreſſivus in directione DIE, alter gyratorius in ſenſum ZDTE. Sed ut phaenomenon ſuccedat, neceſſe eſt, ut celeritas angularis prae progreſſiva certum quendam limitem excedat; quem quo facilius agnoſcamus, calculum ad iſtum caſum accommodemus, quo motus gyratorius globo circa axem horizontalem et ad directionem motus progreſſivi normalem imprimitur. Quod ſi ergo e denotet celeritatem progreſſivam ſecundum directionem DIE, et ε celeritatem angularem retro gyrantem in ſenſum ZDTE, exiſtente f radio globi et Maa ejus momento inertiae, frictioneque $= \delta M$; primo globus in directione DIE procedet, et elapſo tempore t ejus celeritas ſecundum eandem directionem erit $v = e - 2\delta gt$, confecto ſpatio $X = t(e - \delta gt)$: tum vero etiamnum circa eundem axem retro volvetur celeritate angulari $\gamma = \varepsilon - \frac{2\delta fgt}{aa}$.

Motus

Motus autem aequabilis evadit elapſo tempore $t = \frac{aa(e+\varepsilon f)}{2\delta g(aa+ff)}$, eritque tum celeritas progreſſiva $v = \frac{f(ef-\varepsilon aa)}{aa+ff}$; et angularis $\varkappa = \frac{\varepsilon aa-ef}{aa+ff}$. Quare ſi fuerit $\varepsilon > \frac{ef}{aa}$, globus nunc retro movetur, gyratorio adhuc retro vergente: ſin autem fuerit $\varepsilon < \frac{ef}{aa}$, globus adhuc procedit, et gyratio in ſenſum contrarium eſt verſa. Illo caſu globus regredi coepit elapſo tempore $t = \frac{e}{2\delta g}$ et percurſo ſpatio $X = \frac{ee}{4\delta g}$.

Si globus ſit homogeneus, erit $aa = \frac{2}{5}ff$, et ef exprimit celeritatem gyrationis in puncto contactus, quae ſi vocetur $= h$, erit poſt tempus t celeritas progreſſiva $v = e - 2\delta gt$, et gyratoria in puncto contactus, quae ſit $u = h - 5\delta gt$, et ſpatium percurſum $= t(e - \delta gt)$: motus vero aequabilis evadet elapſo tempore $t = \frac{e+h}{7\delta g}$, et confecto ſpatio $= \frac{(6e-h)(e+h)}{49\delta g}$: ubi erit $v = \frac{5e-2h}{7}$, et $u = \frac{2h-5e}{7}$. Ut ergo phaenomenum memoratum ſuccedat, debet eſſe initio $h > \frac{5}{2}e$. Sin autem eſſet $h = \frac{5}{2}e$ uterque motus ſimul extingueretur elapſo tempore $= \frac{e}{2\delta g}$ min. ſec. et confecto ſpatio $= \frac{ee}{4\delta g}$.